

## 7. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie II

**Abgabe: Montag, den 11. Januar 2021** vor der Übung  
Ausgabe: Montag, den 14. Dezember 2020

Insgesamt 10 Punkte

### *Relativistische Kosmologie*

In der relativistischen Kosmologie werden einige Grundannahmen getätigt, die dazu führen, dass man sich in der Hauptsache mit Geometrien beschäftigt, welche eine maximale Symmetrie aufweisen.

Diese Geometrien werden durch die sogenannten Robertson-Walker-Metriken beschrieben:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - S^2(t) \left[ \frac{1}{1 - \epsilon \frac{r^2}{r_0^2}} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] . \quad (1)$$

Dabei ist  $r_0$  eine willkürliche Konstante.  $\epsilon$  charakterisiert die Geometrie. Es werden drei Fälle unterschieden: Im Falle von  $\epsilon = 0$  ist der Raum euklidisch, bei  $\epsilon = -1$  ist der Raum offen mit negativer Krümmung und bei  $\epsilon = +1$  ist er geschlossen mit positiver Krümmung.

Berechnen Sie die zur Robertson-Walker-Metrik passenden Christoffelschen Symbole, sowie damit dann den Ricci-Tensor und den Krümmungsskalar.

Nehmen Sie weiter an, dass der Energie-Impuls-Tensor durch den eines idealen Fluids gegeben ist:

$$T^{ik} = \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) c^2 \delta_0^i \delta_0^k - p g^{ik} \quad \text{mit} \quad p = p(t) \quad \text{und} \quad \rho = \rho(t) \quad . \quad (2)$$

Dabei haben wir angenommen, dass sich die Materie auf zeitartigen Geodäten bewegt, die mit den zeitartigen Koordinatenlinien zusammenfallen. Daher gilt:  $u^i = c \delta_0^i$ .

Vereinfachen Sie die Einsteinschen Gleichungen jetzt so weit wie möglich. Sie werden dann feststellen, dass diese sich auf die Friedmannschen Gleichungen reduzieren ( $k := \epsilon/r_0^2$ ):

$$\frac{3}{S^2} \left( \dot{S}^2 + k \right) = \kappa \rho c^2 \quad , \quad (3)$$

$$\frac{1}{S^2} \left( 2S\ddot{S} + \dot{S}^2 + k \right) = -\kappa p \quad . \quad (4)$$

Eine Kommentierung Ihres Vorgehens wird erwartet! Dafür gibt es auch Punkte!

Falls es Fragen gibt, bin ich per Mail erreichbar:  
gerold.schellstede@campus.tu-berlin.de