Quantum Computation:
Zusammenfassung der 7. Vorlesung (03.06.2011)

2.2 *Die Quantenfouriertransformation*

Für die $M-1$ von 1 verschiedenen M-ten Einheitswurzeln $\zeta \neq 1$, $\zeta^M = 1$, gilt bekanntlich

$$\sum_0^{M-1} \zeta^l = 0.$$

Die symmetrischen komplexen $M \times M$-Matrizen $\frac{1}{\sqrt{M}} e^{2\pi i kl/M}$ sind daher unitär:

$$\frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} e^{\frac{2\pi i}{M} kl} e^{-\frac{2\pi i}{M} lm} = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} e^{\frac{2\pi i}{M}(k-m)l} = \delta_{km}.$$

Definition: Die unitäre Transformation des $\mathbf{C}^M$ auf sich,

$$c_k \longmapsto \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{j=0}^{M-1} e^{-\frac{2\pi i}{M} kj} c_j \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, (M-1)),$$

heißt diskrete Fouriertransformation.

Der unter dem Namen "Fast Fourier Transformation" bekannte klassische Algorithmus, der die diskrete Fourientransformation implementiert, ist reversibel und kann unmittelbar als unitärer Quantenalgorithmus aufgefasst werden. Der Schaltkreis enthält nur unitäre Gatter, die wir schon betrachtet haben.

In der Quanteninformationstheorie wird dagegen für ein N-Qubitsystem, d.h. für $M = 2^N$, die dazu inverse Transformation im $\mathbf{C}^{2^N}$ mit Quantenfourientransformation bezeichnet:

$$\mathbf{F_N} : c_k \longmapsto \hat{c}_k := \frac{1}{\sqrt{2^N}} \sum_{j=0}^{2^N-1} e^{\frac{2\pi i}{2^N} kj} c_j \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, (2^N - 1)).$$

Eine wichtige Form ist die Tensorproduktdarstellung, die wir nun herleiten werden. Zuvor noch eine Bemerkung zur Nomenklatur: Für $\psi \in \mathbf{C}^{2^N}$ bezeichnen wie die Quantenfouriertransformierte mit

$$\hat{\psi} = (|0) \; |1) \; |2) \; \ldots \; |2^N - 1))(\!(\mathbf{F}_{\mathbf{N}kj})\!) \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ . \\ . \\ c_{2^N-1} \end{pmatrix},$$

und es gilt

$$\begin{aligned} \hat{\psi} &= (|0) \; |1) \; |2) \; \ldots \; |2^N - 1)) \begin{pmatrix} \hat{c}_0 \\ \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \\ . \\ . \\ \hat{c}_{2^N-1} \end{pmatrix} \\ &= (|\hat{0}) \; |\hat{1}) \; |\hat{2}) \; \ldots \; |2^N \hat{-} 1)) \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ . \\ . \\ c_{2^N-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ebenso kann man auch die inverse Quantenfourientransformierte,

$$\breve{\varphi} = (|0) \; |1) \; |2) \; \ldots \; |2^N - 1))(\!(\overline{\mathbf{F}_{\mathbf{N}}}_{kj})\!) \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ . \\ . \\ c_{2^N-1} \end{pmatrix},$$

auf verschiedene Weise schreiben:

$$
\begin{aligned}
\breve{\varphi} &= (|0)\ |1)\ |2)\ \dots\ |2^N-1)) \begin{pmatrix} \breve{c}_0 \\ \breve{c}_1 \\ \breve{c}_2 \\ . \\ . \\ \breve{c}_{2^N-1} \end{pmatrix} \\
&= (|\breve{0})\ |\breve{1})\ |\breve{2})\ \dots\ |2^N \breve{-} 1)) \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ . \\ . \\ c_{2^N-1} \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

Wegen der Symmetrie von $\mathbf{F_N}_{kj}$ in der Computerbasis ist $\mathbf{F}^+_{\mathbf{N}kj} = \overline{\mathbf{F_N}}_{kj}$.

Mit $j = 2^{N-1}x_1 + 2^{N-2}x_2 + \cdots + 2^0 x_N$ ist

$$
\begin{aligned}
|\hat{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2^N}} \sum_{j=0}^{2^N-1} e^{\frac{2\pi i}{2^N}kj} |j) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^N}} \sum_{x_1=0}^{1} \sum_{x_2=0}^{1} \cdots \sum_{x_N=0}^{1} e^{\frac{2\pi i}{2^N}k(2^{N-1}x_1+2^{N-2}x_2+\cdots+2^0 x_N)} \bigotimes_{l=1}^{N} |x_l > \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^N}} \sum_{x_1=0}^{1} \sum_{x_2=0}^{1} \cdots \sum_{x_N=0}^{1} e^{2\pi i k(\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{4}+\cdots+\frac{x_N}{2^N})} \bigotimes_{l=1}^{N} |x_l > \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^N}} \sum_{x_1=0}^{1} \sum_{x_2=0}^{1} \cdots \sum_{x_N=0}^{1} \bigotimes_{l=1}^{N} e^{2\pi i k\frac{x_l}{2^l}} |x_l > \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^N}} (\sum_{x_1=0}^{1} e^{2\pi i k\frac{x_1}{2}} |x_1 >) \otimes (\sum_{x_2=0}^{1} e^{2\pi i k\frac{x_2}{4}} |x_2 >) \otimes \cdots \otimes \sum_{x_N=0}^{1} e^{2\pi i k\frac{x_N}{2^N}} |x_N > \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^N}} \bigotimes_{l=1}^{N} (|0> + \ e^{2\pi i k\frac{1}{2^l}} |1>).
\end{aligned}
$$

Sei nun $k = 2^{N-1}y_1 + 2^{N-2}y_2 - \cdots + y_N$, dann ist

$$
2\pi i k \frac{x_l}{2^l} = 2\pi i x_l (2^{N-(l+1)}y_1 + \cdots + y_{N-l} + \frac{y_{N-(l-1)}}{2} \cdots + \frac{y_N}{2^l}),
$$

denn für $N-(l+j)=0$ ist $j=N-l$. Schreibt man

$$0,y_{N-(l-1)}y_{N-(l-2)}\dots y_N := \frac{y_{N-(l-1)}}{2}+\frac{y_{N-(l-2)}}{4}+\dots+\frac{y_N}{2^l},$$

dann ist

$$|\hat{k}) = \frac{1}{\sqrt{2^N}}\bigotimes_{l=1}^{N}(|0>+\ e^{2\pi i\ 0,y_{N-(l-1)}y_{N-(l-2)}\cdots y_N}|1>),$$

weil $e^{2\pi i Z}=1$ für $Z\in\mathbf{Z}$, und ebenso

$$|\breve{k}) = \frac{1}{\sqrt{2^N}}\bigotimes_{l=1}^{N}(|0>+\ e^{-2\pi i\ 0,y_{N-(l-1)}y_{N-(l-2)}\cdots y_N}|1>).$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\mathbf{F_N} &= \sum_{j=0}^{2^N-1}|\hat{j})(j| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^N}}\sum_{j=0}^{2^N-1}\left(\bigotimes_{l=1}^{N}(|0>+\ e^{2\pi i\ 0,x_{N-(l-1)}x_{N-(l-2)}\dots x_N}|1>)\right)(j|\end{aligned}$$

und mithin

$$\begin{aligned}\mathbf{F_N}^+ &= \sum_{j'=0}^{2^N-1}|j')(\hat{j}'| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^N}}\sum_{j'=0}^{2^N-1}|j')\left(\bigotimes_{l=1}^{N}(<0|+\ \ e^{-2\pi i\ 0,x'_{N-(l-1)}x'_{N-(l-2)}\dots x'_N}\ <1|)\right),\end{aligned}$$

wobei $|j')=|x'_1x'_2\dots x'_N>$ ist. Folglich ist

$$\begin{aligned}\mathbf{F_N}\mathbf{F_N}^+ &= \frac{1}{2^N}\sum_{j=0}^{2^N-1}\left(\bigotimes_{l=1}^{N}(|0>+\ e^{2\pi i\ 0,x_{N-(l-1)}x_{N-(l-2)}\dots x_N}|1>)\right) \\ &\qquad\left(\bigotimes_{l=1}^{N}(<0|+\ \ e^{-2\pi i\ 0,x_{N-(l-1)}x_{N-(l-2)}\dots x_N}\ <1|)\right) \\ &= \frac{1}{2^N}\sum_{j=0}^{2^N-1}\bigotimes_{l=1}^{N}(|0><0|+|1><1|)=\mathbf{1}.\end{aligned}$$