

Quantum Computation:

Zusammenfassung der 10. Vorlesung (24.06.2011)

2.2.1 Fehlerabschätzung im Fall $2^N \phi \notin \mathbf{Z}$

Falls $2^N \phi = b + 2^N \delta$, $b \in \mathbf{Z}$, $\delta \in (0, \frac{1}{2^N})$, d.h. $\phi = 0, b_1 b_1 \dots b_N \delta_1 \delta_2 \delta_3 \dots$ ist, dann ist der Zustand Ψ_N vom letzten Abschnitt

$$\Psi_N = \frac{1}{\sqrt{2^N}} \sum_{k=0}^{2^N-1} e^{\frac{2\pi i}{2^N} k(b+2^N \delta)} |k\rangle$$

nicht die Fouriertransformierte von $|b\rangle$ und die Anwendung von \mathbf{F}_N^+ führt auf

$$\check{\Psi}_N = \sum_{k=0}^{2^N-1} a_k |k\rangle,$$

wobei im Allg. $a_k \neq 0$ für $k \neq b$ ist. Die Messung am ersten Register liefert also nicht notwendig b , d.h. die ersten $2^N - 1$ Stellen von ϕ hinter dem Komma werden nicht richtig bestimmt, die Abweichung ist größer als $1/2^N$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $L < N$ Stellen hinter dem Komma richtig bestimmt werden? Für die Entwicklungskoeffizienten a_k gilt

$$\begin{aligned} a_k &= \langle k | \check{\Psi}_N \rangle = \langle \hat{k} | \Psi_N \rangle \\ &= \frac{1}{2^N} \sum_{l=0}^{2^N-1} e^{-\frac{2\pi i}{2^N} lk} \sum_{m=0}^{2^N-1} e^{\frac{2\pi i}{2^N} m(b+2^N \delta)} \langle l | m \rangle \\ &= \frac{1}{2^N} \sum_{l=0}^{2^N-1} e^{\frac{2\pi i}{2^N} l(b-k+2^N \delta)} = \frac{1}{2^N} \sum_{l=0}^{2^N-1} \xi^l \end{aligned}$$

wobei $\xi = e^{\frac{2\pi i}{2^N}(b-k+2^N \delta)}$. Die Summe der geometrischen Reihe ist $\frac{1-\xi^{2^N}}{1-\xi}$, also ist

$$a_k = \frac{1}{2^N} \frac{1 - e^{2\pi i(b-k+2^N \delta)}}{1 - e^{\frac{2\pi i}{2^N}(b-k+2^N \delta)}} = \frac{1}{2^N} \frac{1 - e^{2\pi i 2^N \delta}}{1 - e^{2\pi i(\frac{b-k}{2^N} + \delta)}}.$$

Für die Wahrscheinlichkeit, bei Messung am ersten Register das Ergebnis k zu erhalten, ergibt sich zu

$$\begin{aligned} p_k(b, \delta) = |a_k|^2 &= \frac{1}{2^{2N}} \frac{(1 - 2 \cos(2^{N+1}\pi\delta)) + 1}{(1 - 2 \cos(2\pi(\frac{b-k}{2^N} + \delta)) + 1)} \\ &= \frac{1}{2^{2N}} \frac{(1 - \cos(2^{N+1}\pi\delta))}{(1 - \cos(2\pi(\frac{b-k}{2^N} + \delta)))}. \end{aligned}$$

Damit ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Messwert am ersten Register um $d := k - b$ vom richtigen Wert b abweicht

$$q_d(\delta) = p_{b+d}(b, \delta) = \frac{1}{2^{2N}} \frac{(1 - \cos(2^{N+1}\pi\delta))}{(1 - \cos(2\pi(\delta - \frac{d}{2^N})))}.$$

Dies ist von b unabhängig. (Bemerke $2^N\phi = b_1b_2 \cdots b_N, \delta_1\delta_2 \cdots$ und nur für $\delta = 0$ gilt $q_d(0) = 0$ für $d \neq 0$. Wir haben jedoch $\delta \in (0, 1)$ vorausgesetzt und $d \in \mathbf{Z}$.) Wir können damit die Wahrscheinlichkeit dafür abschätzen, dass die Abweichung $|d|$ des Messwertes größer als ein vorgegebenes $\varepsilon \geq 1$ ist. Diese Wahrscheinlichkeit ist

$$q_{|d|>\varepsilon}(\delta) = \sum_{d=-b}^{-(\varepsilon+1)} q_d(\delta) + \sum_{d=\varepsilon+1}^{2^N-(b+1)} q_d(\delta).$$

Alternativ kann man wegen $q_{|d|>\varepsilon}(\delta) + q_{|d|\leq\varepsilon}(\delta) = 1$ auch

$$q_{|d|\leq\varepsilon}(\delta) = \sum_{d=-\varepsilon}^{\varepsilon} q_d(\delta)$$

nach unten abschätzen. Dabei sollte für $\varepsilon \geq 1$ beachtet werden, dass die Summationsgrenzen nur für $\varepsilon \leq b \leq 2^N - (\varepsilon + 1)$ und $\varepsilon \geq 1$ gelten und die Fälle $0 \leq b < \varepsilon$ und $2^N - (\varepsilon + 1) < b \leq 2^N - 1$ gesondert behandelt werden müssen. Wir werden die Summen durch Integrale abschätzen. Um die Integrale leichter berechnen zu können, schätzen wir den Integranden durch rationale Funktionen ab.

Im Intervall $[0, 2\pi]$ haben das Polynom 4. Ordnung

$$f(x) = \alpha x^2(x - 2\pi)^2 \quad \text{und} \quad 1 - \cos x$$

die Nullstellen und Extremata an den gleichen Stellen. Durch geeignete Verfügung über α lässt $1 - \cos x$ sowohl nach oben als auch nach unten abschätzen. Es gilt

$$f'(x) = 4\alpha(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x), \quad f''(x) = 4\alpha(3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2),$$

sowie

$$f(\pi) = \alpha\pi^4, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \alpha\frac{9}{16}\pi, \quad f''(0) = f''(2\pi) = 8\alpha\pi^2, \quad f''(\pi) = -4\alpha\pi^2$$

Für die Abschätzung nach oben muss gelten $f(\pi) \geq 2$, also $\alpha \geq \frac{2}{\pi^4}$, und ferner $f''(0) = f''(2\pi) \geq 1$, also $\alpha \geq \frac{1}{8\pi^2}$ sowie $f''(\pi) \geq -1$, also $\alpha \leq \frac{1}{4\pi^2}$, damit die Krümmungsradien der majorisierenden Funktion die der majorisierten Funktion an den Minima übertreffen, und der Krümmungsradius der majorisierten Funktion den der majorisierenden am Maximum übertrifft. Wegen $\frac{1}{8\pi^2} \leq \frac{2}{\pi^4} \leq \frac{1}{4\pi^2}$ scheint $\alpha = \frac{2}{\pi^4}$ geeignet zu sein. Tatsächlich ist mit diesem α auch $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{18}{16}$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) \geq 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. Damit ist, weil f nur einen Wendepunkt in $[0, \pi]$ hat,

$$1 - \cos x \leq \frac{2}{\pi^4} x^2 (x - 2\pi)^2.$$

Die für die Abschätzung nach unten entsprechenden Bedingungen $\alpha \leq \frac{2}{\pi^4}$, $\alpha \leq \frac{1}{8\pi^2}$ und $\alpha \geq \frac{1}{4\pi^2}$ lassen sich nicht erfüllen. Die letzte dieser Bedingungen ist jedoch nur dann notwendig, wenn $f(\pi) = 2$ ist. Wählen wir $\alpha = \frac{1}{8\pi^2}$, dann majorisiert $1 - \cos x$ die Funktion $f(x)$ am den Enden des Intervalls und überdies gilt $f(\pi) = \frac{\pi^2}{8}$ und $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{9\pi^2}{128} < 1$ sowie $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{49\pi^2}{256} < 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. Damit gilt

$$1 - \cos x \geq \frac{1}{8\pi^2} x^2 (x - 2\pi)^2.$$

Da die Abweichung d als Summations- bzw. Integrationsvariable nur im Nenner auftritt, müssen wir für die Fehlerabschätzung nur die Nenner von $q_d(\delta)$ approximieren. Es ist mit $x = 2\pi\left(\frac{b-k}{2^N} + \delta\right)$

$$\frac{1}{2^{2N}} \frac{1 - \cos(2^{N+1}\pi\delta)}{\frac{1}{8\pi^2} (2\pi(\delta - \frac{d}{2^N}))^2 (2\pi(\delta - \frac{d}{2^N}) - 2\pi)^2} =$$

$$\frac{1}{2^{2N+1}} \frac{1 - \cos(2^{N+1}\pi\delta)}{\pi^2 (\delta - \frac{d}{2^N})^2 ((\delta - \frac{d}{2^N}) - 1)^2} \geq q_d(\delta) \geq \frac{1}{2^{2N+5}} \frac{1 - \cos(2^{N+1}\pi\delta)}{(\delta - \frac{d}{2^N})^2 ((\delta - \frac{d}{2^N}) - 1)^2}.$$

Wir wollen nun die Wahrscheinlichkeit dafür nach unten abschätzen, dass der Betrag die Abweichung $|d|$ kleiner als ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$ ist. Wir setzen dabei ε so klein voraus, dass neben $\delta \leq \frac{1}{2^N} \ll 1$ auch $|\delta - \frac{d}{2^N}| \leq \frac{1+\varepsilon}{2^N} \ll 1$ ist, und die Näherung

$$q_d(\delta) \geq \frac{1 - \cos(2^{N+1}\pi\delta)}{2^{2N+5}} \frac{1}{(\delta - \frac{d}{2^N})^2}$$

noch eine vertretbare Abschätzung ist. Damit wird

$$q_{|d| \leq \varepsilon}(\delta) \geq \frac{1 - \cos(2^{N+1}\pi\delta)}{2^{2N+5}} \sum_{d=-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{(\delta - \frac{d}{2^N})^2}.$$

Wegen

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{(\delta - \frac{x}{2^N})^2} = \frac{1}{2^{N-1}} \frac{1}{(\delta - \frac{x}{2^N})^3} \begin{cases} > 0 & \text{falls } \frac{x}{2^N} < \delta, \text{ also } x < 2^N \delta < 1 \\ < 0 & \text{falls } \frac{x}{2^N} > \delta, \text{ also } x > 2^N \delta > 0 \end{cases}$$

ist also

$$\sum_{d=-\varepsilon}^0 \frac{1}{(\delta - \frac{d}{2^N})^2} \geq \int_{-(\varepsilon+1)}^0 \frac{1}{(\delta - \frac{d}{2^N})^2} dd$$

und

$$\sum_{d=1}^{\varepsilon} \frac{1}{(\delta - \frac{d}{2^N})^2} \geq \int_1^{(\varepsilon+1)} \frac{1}{(\delta - \frac{d}{2^N})^2} dd,$$

weil die Summen Obersummen der Integrale sind. Aus

$$\int_{-(\varepsilon+1)}^0 \frac{1}{(\delta - \frac{d}{2^N})^2} dd = 2^{2N} \frac{1}{(2^N \delta - d)} \Big|_{-(\varepsilon+1)}^0 = 2^{2N} \left(\frac{1}{2^N \delta} - \frac{1}{2^N \delta + (\varepsilon + 1)} \right)$$

und

$$\int_1^{\varepsilon+1} \frac{1}{(\delta - \frac{d}{2^N})^2} dd = 2^{2N} \left(\frac{1}{2^N \delta - (\varepsilon + 1)} - \frac{1}{2^N \delta - 1} \right)$$

folgt

$$\sum_{d=-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{(\delta - \frac{d}{2^N})^2} \geq 2^{2N} \left(\frac{1}{2^N \delta (1 - 2^N \delta)} + \frac{2(\varepsilon + 1)}{2^{2N} \delta^2 - (\varepsilon + 1)^2} \right).$$

Schließlich ist

$$\begin{aligned} q_{|d|\leq\epsilon}(\delta) &\geq \frac{1 - \cos(2^{N+1}\pi\delta)}{2^5} \left(\frac{1}{2^N\delta(1 - 2^N\delta)} + \frac{2(\epsilon + 1)}{2^{2N}\delta^2 - (\epsilon + 1)^2} \right) \\ &= \frac{1 - \cos(2^{N+1}\pi\delta)}{2^5} \left(\frac{1}{2^N\delta(1 - 2^N\delta)} - \frac{2(\epsilon + 1)}{(\epsilon + 1)^2 - 2^{2N}\delta^2} \right) \end{aligned}$$

Für die Praxis ist diese Abschätzung von großer Bedeutung, weil die Frage, wie groß man N wählen muss, wenn die Messung am ersten Register die ersten K Stellen der Phase mit großer Wahrscheinlichkeit richtig wiedergeben soll, relevant ist. Dazu betrachte man (s. oben: k = Messwert, b richtiger Wert)

$$d = k - b = (k_1 - b_1)2^{N-1} + \dots + (k_K - b_K)2^{N-K} + \Theta,$$

$|\Theta| < 2^{N-K}$. Die ersten K Stellen von k und b stimmen überein, wenn $|d| \leq 2^{N-K-1} = 2^{L-1} = \epsilon$, $L := N - K$, ist. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist, wenn das erste Register aus N Qubits besteht,

$$\begin{aligned} q_{|d|\leq\epsilon}(\delta) &\geq \frac{1 - \cos(2^{N+1}\pi\delta)}{2^5} \left(\frac{1}{2^N\delta(1 - 2^N\delta)} - \frac{2(2^{L-1} + 1)}{(2^{L-1} + 1)^2 - 2^{2N}\delta^2} \right) \\ &\approx \frac{1 - \cos(2^{N+1}\pi\delta)}{2^5} \left(\frac{1}{2^N\delta(1 - 2^N\delta)} - \frac{2}{(2^{L-1} + 1)} \right), \end{aligned}$$

wenn für große N im Nenner des zweiten Terms in der Klammer $2^{2N}\delta^2 < 1$ gegen $(2^{L-1} + 1)^2$ vernachlässigt werden kann, d.h. $(2^N\delta)^2 \ll (2^{L-1} + 1)^2$.