Zusammenfassung der 20. Vorlesung (07.01.2010)

1.4.8 *Das "Entanglement of Formation" (4.Fortsetzung)*:

Bevor wir in der Herleitung von Wootter's Formel fortfahren, geben wir noch einen kurzen Überblick über die bisherigen Ergebnisse.

Für einen bipartiten Dichteoperator $\rho = \sum_i p_i|\Psi_i >< \Psi_i|$ ist der Erwartungdwert der Verschränktheitsentropien der reinen Komponenten, $\overline{E}(\rho) = \sum_i p_i E(\Psi_i)$ von der Zerlegung in reine Komponenten abhängig. Das "entanglement of formation" ist durch

$$E_f(\rho) = inf\{\overline{E}(\rho)|\text{reine Zerlegungen}\}$$

definiert. Nun gilt

$$\begin{aligned} \rho = \sum_{i=1}^{n} p_i|\Psi_i >< \Psi_i| &= \sum_{k=1}^{m} |q_k\Phi_k >< \Phi_k|, \; m \geq n \\ \Leftrightarrow \quad (\exists\, U_{kk'}\text{unitär}) \; \sqrt{q_k}\Phi_k &= \sum_{i=1}^{n} U_{ki}\sqrt{p_i}\Psi_i. \end{aligned}$$

Da m eine beliebige natürliche Zahl ist, kann ein Variationsproblem mit endlich vielen Parametern zur Bstimmung von $E_f(\rho)$ kaum formuliert werden.

Nun lässt sich die Verschränktheitsentropie für reine bipartite Qubitzustände in der Form

$$E(\Psi) = F \circ C(\Psi)$$

schreiben, wobei die Funktion C mit

$$\Psi = \sum_{x,y=0}^{1} \alpha_{xy}|xy> \quad \text{durch} \quad C(\Psi) = 2|\text{det}\alpha_{xy}| = 2c_0c_1 \in [0,1]$$

gegeben ist und c_x die Schmidtkoeffizienten sind. Für die Funktion F errechnet sich mit $w(z) = \sqrt{1-z^2}$

$$F(z) = -\left(\frac{1}{2}(1+w(z))\log_2\frac{1}{2}(1+w(z)) + \frac{1}{2}(1-w(z))\log_2\frac{1}{2}(1-w(z))\right),$$

und man zeigt, dass F monoton wachsend und strikt konvex ist. Die Funktion C wird in diesem Zusammenhang "concurrence" genannt und man kann sich fragen, ob man das "entanglement of formation" allge,einer auf diese Weise darstellen kann.

Für bipartite Qubitzustände trifft dies zu. Die **Spin-Flip Operation**

$$\mathbf{C}^2 \ni \psi \mapsto \tilde{\psi} := \sigma_2 I \psi,$$

wobei I die Komplexkonjugation in Bezug auf die Computerbasis ist, bewirkt die Spinumkehr, weil stets $< \psi, \tilde{\psi} >= 0$ ist. Für reine bipartite Zustände definiert man

$$\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^2 \ni \Psi \mapsto \tilde{\Psi} := (\sigma_2 I \otimes \sigma_2 I)\Psi$$

und findet

$$C(\Psi) = |<\Psi, \tilde{\Psi}>| = \mathrm{tr}(\sqrt{\sqrt{|\Psi><\Psi|}|\tilde{\Psi}><\tilde{\Psi}|\sqrt{|\Psi><\Psi|}}).$$

Der selbstadjungierte Operator

$$R(|\Psi><\Psi|) := \sqrt{\sqrt{|\Psi><\Psi|}|\tilde{\Psi}><\tilde{\Psi}|\sqrt{|\Psi><\Psi|}}$$

hat wegen $|\Psi><\Psi| = |\Psi><\Psi|^2$ die Spektraldarstellung

$$R(|\Psi><\Psi|) = \sqrt{|\Psi><\Psi||\tilde{\Psi}><\tilde{\Psi}||\Psi><\Psi|} = |<\Psi, \tilde{\Psi}>||\Psi><\Psi|$$

und somit die Eigenwerte $\lambda_0 = |<\Psi, \tilde{\Psi}>|$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, so dass

$$C(\Psi) = \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3$$

gilt.

Wir sind auf dem Wege, zu beweisen, dass Analoges auch für gemischte bipartite Qubitzustände gilt und haben dazu

$$\tilde{\rho} := (\sigma_2 I \otimes \sigma_2 I)\rho \qquad \text{und} \qquad R(\rho) := \sqrt{\sqrt{\rho}\tilde{\rho}\sqrt{\rho}}$$

eingeführt. O.B.d.A. haben wir für die Eigenwerte des positiven Operators $R(\rho)$ die Anordnung $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq 0$ angenommen und den Fall $\mathcal{C}(\rho) = \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 > 0$ betrachtet. Wir konnten das Lemma

$$\mathcal{C}(\rho) > 0 \quad . \Rightarrow . \quad (\exists s_i, \Upsilon_i)\ \rho = \sum_i s_i |\Upsilon_i><\Upsilon_i| \ \wedge\ C(\Upsilon_i) = \mathcal{C}(\rho)$$

beweisen und aus dem Beweisgang das Korollar

Korollar 1: Sei ρ ein Dichteoperator auf $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^2$, und seien λ_i, $i = 0, 1.2, 3$, $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq 0$ die Eigenwerte von $R(\rho) := \sqrt{\sqrt{\rho} \quad \tilde{\rho} \quad \sqrt{\rho}}$. Dann gibt es eine reine Zerlegung $\rho = \sum_{i=0}^{3} r_i |\Theta_i >< \Theta_i|$ mit $\sqrt{r_i r_k} < \Theta_i|\tilde{\Theta}_k >= r_i < \Theta_i|\tilde{\Theta}_i > \delta_{ik} = \lambda_i \delta_{ik}$.

folgern. Eine weitere Folgerung aus dem Beweis des Lemmas ist das Korollar:

Korollar 2: Sei ρ Dichteoperator in $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^2$, und seien λ_i, $i = 0, 1.2, 3$, $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq 0$ die Eigenwerte von $R(\rho) := \sqrt{\sqrt{\rho} \quad \tilde{\rho} \quad \sqrt{\rho}}$. Unabhängig vom Vorzeichen von $\mathcal{C}(\rho) = \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3$, gibt es eine reine Zerlegung $\rho = |\sum_{i=0}^{3} r_i |\Xi_i >< \Xi_i|$ mit $\sqrt{r_i r_k} < \Xi_i|\tilde{\Xi}_k >= \epsilon_i \lambda_i \delta_{ik}$, $\epsilon_0 = 1$ und $\epsilon_\nu = -1$, $\nu = 1, 2, 3$.

Diese Korollare werden wir im Folgenden anwenden.

Das in der letzten Vorlesung bewiesene Lemma behauptet unter der Voraussetzung $\mathcal{C}(\rho) = \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 > 0$ die Existenz einer Zerlegung

$$\rho = \sum_i s_i |\Upsilon_i >< \Upsilon_i| \quad \text{mit} \quad C(\Upsilon_i) = \mathcal{C}(\rho).$$

Damit gilt

$$E_f(\rho) \leq \sum_i s_i E(\Upsilon_i) = \sum_i s_i F \circ C(\Upsilon_i) = \sum_i s_i F \circ \mathcal{C}(\rho) = F \circ \mathcal{C}(\rho).$$

Wir zeigen nun, dass

$$\mathcal{C}(\rho) \leq \sum_{\mu=1}^{M} l_\mu C(\Lambda_\mu), \quad \text{wenn nur} \quad \rho = \sum_\mu l_\mu |\Lambda_\mu >< \Lambda_\mu|$$

gilt, also eine beliebige Zerlegung von ρ in reine Zustände vorliegt. Dazu können wir von der im Korollar 2 behaupteten Existenz der reinen Zerlegung in die $|\Xi_i >< \Xi_i|$ ausgehen und für Λ_μ

$$\sqrt{l_\mu} \Lambda_\mu = \sum_{i=0}^{3} w_{\mu i} \sqrt{r_i}\, \Xi_i \quad \text{mit} \quad \sum_{\mu=1}^{N} w_{\mu i} \overline{w}_{\mu k} = \delta_{ik}$$

ansetzen. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu=1}^{N} l_\mu C(\Lambda_\mu) &= \sum_{\mu=1}^{N} l_\mu| < \Lambda_\mu|\tilde{\Lambda}_\mu > | = \sum_{\mu=1}^{N} l_\mu \left| \sum_{i,k=0}^{3} \overline{w}_{\mu i}\overline{w}_{\mu k}\frac{\sqrt{r_i r_k}}{l_\mu} < \Xi_i|\tilde{\Xi}_k > \right| \\
&= \sum_{\mu=1}^{N} \left| \sum_{i=0}^{3} \overline{w}_{\mu i}\overline{w}_{\mu i} r_i < \Xi_i|\tilde{\Xi}_i > \right| \\
&= \sum_{\mu=1}^{N} \left| \frac{w_{\mu 0}}{\overline{w}_{\mu 0}} \sum_{i=0}^{3} \overline{w}_{\mu i}\overline{w}_{\mu i} r_i < \Xi_i|\tilde{\Xi}_i > \right| \\
&\geq \left| \sum_{\mu=1}^{N} \sum_{i=0}^{3} \frac{w_{\mu 0}}{\overline{w}_{\mu 0}} \overline{w}_{\mu i}\overline{w}_{\mu i} r_i < \Xi_i|\tilde{\Xi}_i > \right| \\
&= \left| \sum_{\mu=1}^{N} \left(w_{\mu 0}\overline{w}_{\mu 0} r_0 < \Xi_i|\tilde{\Xi}_0 > + \sum_{i=1}^{3} \frac{w_{\mu 0}}{\overline{w}_{\mu 0}} \overline{w}_{\mu i}\overline{w}_{\mu i} r_i < \Xi_i|\tilde{\Xi}_i > \right) \right|,
\end{aligned}$$

denn $\frac{w_{\mu i}}{\overline{w}_{\mu i}}$ sind Phasenfaktoren. Damit folgt weiter

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu=1}^{N} l_\mu C(\Lambda_\mu) &\geq \left| \lambda_0 - \sum_{i=1}^{3}\sum_{\mu=1}^{N} \frac{w_{\mu 0}}{\overline{w}_{\mu 0}} \overline{w}_{\mu i}\overline{w}_{\mu i}\lambda_i \right| \geq \left| \lambda_0 - \sum_{i=1}^{3} \left| \sum_{\mu=1}^{N} \frac{w_{\mu 0}}{\overline{w}_{\mu 0}} \overline{w}_{\mu i}\overline{w}_{\mu i}\lambda_i \right| \right| \\
&= \left| \lambda_0 - \sum_{i=1}^{3} \left| \sum_{\mu=1}^{N} \frac{w_{\mu i}}{\overline{w}_{\mu i}} \overline{w}_{\mu i}\overline{w}_{\mu i}\lambda_i \right| \right| = \lambda_0 - \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = \mathcal{C}(\rho),
\end{aligned}$$

denn nach Voraussetzung ist $\mathcal{C}(\rho) = \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 > 0$. Also gilt in diesem Fall für alle reinen Zerlegungen von ρ wegen der Konvexität und Monotonie der Funktion F

$$\sum_\mu l_\mu E(\Lambda_\mu) = \sum_\mu l_\mu F \circ C(\Lambda_\mu) \geq F(\sum_\mu l_\mu C(\Lambda_\mu)) \geq F \circ \mathcal{C}(\rho) = \sum_i s_i E(\Upsilon_i).$$

Damit ist gezeigt:

Lemma: Sei ρ Dichteoperator in $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^2$, und seien λ_i, $i = 0, 1.2, 3$, $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq 0$ die Eigenwerte von $R(\rho) := \sqrt{\sqrt{\rho} \quad \tilde{\rho} \quad \sqrt{\rho}}$. Ist dann $\mathcal{C}(\rho) := \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 > 0$, dann gilt $E_f(\rho) = F \circ \mathcal{C}(\rho)$.

Den Fall $\lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 \leq 0$ klärt das folgrnde Lemma:

Lemma: Sei ρ Dichteoperator in $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^2$, und seien λ_i, $i = 0, 1.2, 3$, $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq 0$ die Eigenwerte von $R(\rho) := \sqrt{\sqrt{\rho} \quad \tilde{\rho} \quad \sqrt{\rho}}$. Ist dann $\mathcal{C}(\rho) = \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 \leq 0$, so gibt es eine reine Zerlegung $\rho = |\sum_{i=0}^{3} d_i|\Delta_i >< \Delta_i|$ mit $C(\Delta_i) = 0$, $i = 0, 1, 2, 3$.

Beweis: Wir hatten die Zerlegung $\rho = \sum_i r_i |\Xi_i >< \Xi_i|$ im Korollar 2 aus einer Zerlegung $\rho = \sum_i r_i |\Theta_i >< \Theta_i|$ mit der Eigenschaft $\sqrt{r_i r_k} < \Theta_i|\tilde{\Theta}_k >= \lambda_i \delta_{ik}$, Korollar 1, durch Einführung geeigneter Pkasenfaktoren gewonnen. Von der letzteren Zerlegung gehen wir nun aus und verlangen mit Unbestimmten a_{jk}

$$\sqrt{d_j}\theta_j = \sum_k a_{jk}\sqrt{r_k}\Theta_k, \qquad \sum_j a_{jk}\overline{a}_{jl} = \delta_{kl}$$

die Gültigkeit von

$$< \theta_j|\tilde{\theta}_j >= \sum_{kl} \overline{a}_{jk}\overline{a}_{jl}\sqrt{r_k r_l} < \Theta_k|\tilde{\Theta}_l >= \sum_k (\overline{a}_{jk})^2 \lambda_k = 0, \quad (j = 0, 1, 2, 3).$$

Mit $\alpha = e^{-i(\epsilon/2)}$ und $\beta = e^{-i(\mu/2)}$ ist

$$((a_{jk})) = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta & i \\ 1 & \alpha & -\beta & -i \\ 1 & -\alpha & \beta & -i \\ 1 & -\alpha & -\beta & i \end{pmatrix}$$

unitär, und

$$((\overline{a}_{jk}^2)) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & \overline{\alpha}^2 & \overline{\beta}^2 & -1 \\ 1 & \overline{\alpha}^2 & \overline{\beta}^2 & -1 \\ 1 & \overline{\alpha}^2 & \overline{\beta}^2 & -1 \\ 1 & \overline{\alpha}^2 & \overline{\beta}^2 & -1 \end{pmatrix},$$

so dass sich die Forderung auf

$$\lambda_0 + e^{i\epsilon}\lambda_1 + e^{i\mu}\lambda_2 - \lambda_3 = 0$$

reduziert. Sie ist wegen $\lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 \leq 0$, d.h. $\lambda_0 - \lambda_3 \leq \lambda_2 + \lambda_3$ stets erfüllbar, denn die Winkel ϵ und μ ergeben sich trigonometrisch in dem Dreieck mit den Seitenlängen $\lambda_0 - \lambda_3$. λ_1 md λ_2.

Der folgende Satz fasst das Ergebnis zusammen:

Satz/Definition (Wootter's Formel): Für bipartite Qubitsysteme ist mit den Bezeichnungen in den vorstehenden Lemmata

$$\mathbf{C}(\rho) := \begin{cases} \mathcal{C}(\rho) & \text{falls} \quad \mathcal{C}(\rho) > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

eine "concurrence function". Das "entanglement of formation" ist damit

$$E_f(\rho) = F \circ \mathbf{C}(\rho),$$

wobei

$$\begin{aligned} F(x) \quad = \quad & - \left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{2} \log_2 \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{2} \right. \\ & \left. + \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2} \log_2 \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2} \right) \end{aligned}$$

ist.

Wootter's Formel gilt natürlich auch im Spezialfall $\rho = |\Psi >< \Psi|$, von dem wir ausgegangen waren. Wegen $|\Psi >< \Psi| = |\Psi >< \Psi|^2$ ist $R(|\Psi >< \Psi|) = | < \Psi|\tilde{\Psi} > ||\Psi >< \Psi|$ und $\lambda_i = | < \Psi|\tilde{\Psi} > |\delta_{i0}$, so dass die ursprünglich für reine Zustände eingeführte Funktion $C(\Psi)$ mit $\mathbf{C}(|\Psi >< \Psi|)$ übereinstimmt.