# Zusammenfassung der 3. Vorlesung (26.04.2010)

Wir kommen nun zu unserer unsprüglichen Problematik zurück: Die Operatoren $A = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + b \cdot \sigma)$ erfüllen $\mathrm{tr}A = 1$, sind aber nicht notwendig positiv. Mit

$$b = \|b\|\mathbf{e}(\Theta, \Phi), \qquad \mathbf{e}(\Theta, \Phi) := \begin{pmatrix} \sin\Theta\cos\Phi \\ \sin\Theta\sin\Phi \\ \cos\Theta \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e_3} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und $e := \mathbf{e}(\Theta, \Phi) \times \mathbf{e_3}$ liefert die Kovarianzbeziehung

$$D_e(\Theta)(b \cdot \sigma)D_e^+(\Theta) = R_e(\Theta)b) \cdot \sigma = \|b\|\sigma_3,$$

und damit

$$D_e(\Theta)\frac{1}{2}(\mathbf{1} + b \cdot \sigma)D_e^+(\Theta) = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \|b\|\sigma_3)$$

mit dem Spektrum $\{\frac{1}{2}(1 - \|b\|), \frac{1}{2}(1 + \|b\|)\}$. Wegen der Unitarität von $D_e(\Theta)$ ist dies auch das Spektrum von $b \cdot \sigma$. Damit haben wir gezeigt:

$$\frac{1}{2}(\mathbf{1} + b \cdot \sigma) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \|b\| \leq 1.$$

Wir fassen die die Qubit Zustände betreffenden Ergebnisse in folgendem Satz zusammen:

**Satz:** Der Zustandsraum $\mathcal{V}$ des Qubits ist der reelle vierdimensionale Vektorraum der hermiteschen $(2 \times 2)$-Matrizen. Die Menge der Zustände $\mathcal{Z}$ ist die konvexe Teilmenge der Operatoren

$$\rho = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + r\mathbf{e}(\Theta, \Phi) \cdot \sigma), \qquad 0 \leq r \leq 1,$$

die *Blochkugel* genannt wird, und die auf der Hyperebene $\mathbf{H} = \{A | \mathrm{tr}A = 1\}$ liegt. Die Blochkugel ist ein bijektivs und affines Bild der abgeschlossenen Einheitskugel des $\mathbf{R}^3$, der Vektor $b = r\mathbf{e}(\Theta, \Phi)$ heisst *Blochvektor* des Zustands $\rho$. Die reinen Zustände sind die Extremalpunkte der Blochkugel, also der Rand der Blochkugel, der auch *Blochsphäre* genannt wird.

Wir betrachten n un die Basis der n ormierteen Eigenvektoren von $\sigma_3$

$$\sigma_3|0>=|0>, \quad \sigma_3|1>=-|1>, \quad \sigma_3 = |0><0| - |1><1|,$$

dann ist

$$|0><0| = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \sigma_3), \qquad\qquad |1><1| = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \sigma_3),$$

d.h. die Blochvektoren dieser reinen Zustände sind $\mathbf{e_3}$, beziehungsweise $-\mathbf{e_3}$. Wegen

$$D_e(\Theta) = e^{-i(e\cdot\sigma)\frac{\Theta}{2}} = \cos\frac{\Theta}{2} - i(e\cdot\sigma)\sin\frac{\Theta}{2}$$

ergeben sich mit $\tilde{e} = \mathbf{e_3}\times\mathbf{e}(\frac{\pi}{2},\Phi) = \mathbf{e}(\frac{\pi}{2},\Phi+\frac{\pi}{2})$ und $\tilde{e}\cdot\sigma = -\sigma_1\sin\Phi + \sigma_2\cos\Phi$ die Eigenvektoren von $\mathbf{e}(\Theta,\Phi)\cdot\sigma = D_{\tilde{e}}(\theta)\mathbf{e_3}D^+_{\tilde{e}}(\theta)$ zum Eigenwert 1

$$\begin{aligned}
\psi_0(\Theta,\Phi) = D_{\tilde{e}}(\Theta)|0> &= \begin{pmatrix} |0> & |1> \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\Theta}{2} & -e^{-i\Phi}\sin\frac{\Theta}{2} \\ e^{i\Phi}\sin\frac{\Theta}{2} & \cos\frac{\Theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \cos\frac{\Theta}{2}|0> + e^{i\Phi}\sin\frac{\Theta}{2}|1>
\end{aligned}$$

und zum Eigenwert -1

$$\begin{aligned}
\psi_1(\Theta,\Phi) = D_{\tilde{e}}(\Theta)|1> &= \begin{pmatrix} |0> & |1> \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\Theta}{2} & -e^{-i\Phi}\sin\frac{\Theta}{2} \\ e^{i\Phi}\sin\frac{\Theta}{2} & \cos\frac{\Theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= -e^{-i\Phi}\sin\frac{\Theta}{2}|0> + \cos\frac{\Theta}{2}|1> .
\end{aligned}$$

Die Blochvektoren der Dichteoperatoren für diese reinen Zustände folgen aus der Kovarianzbeziehung

$$|\psi_0(\Theta,\Phi)><\psi_0(\Theta,\Phi)| = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + (R_{\tilde{e}}(\Theta)\mathbf{e_3})\cdot\sigma) = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathbf{e}(\Theta,\phi)\cdot\sigma)$$

und

$$|\psi_1(\Theta,\Phi)><\psi_1(\Theta,\Phi)| = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - (R_{\tilde{e}}(\Theta)\mathbf{e_3})\cdot\sigma) = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{e}(\Theta,\phi)\cdot\sigma).$$

Die inneren Punkte der Blochsphäre sind Gemische der reinen Zustände auf der Blochsphäre. Jeder gegebne gemischte Zustand $\rho$ kann so zerlegt werden, dasss er einen beliebigen reinen Zustand $|\psi><\psi|$ als Komponente enthält: Zum Beispiel ist

$$\rho = \lambda|\psi><\psi| + (1-\lambda)|\phi><\phi|, \qquad 0 < \lambda < 1,$$

wobei $|\phi >< \phi|$ der andere Schnittpunkt der durch $|\phi >< \phi|$ und $\rho$ bestimmten Geraden mit der Blochsphäre ist. Nur die Gerade, die neben $\rho$, ein Antipodenpaar der Blochsphäre enthält, ist eindeutig und liefert die Spektralzerlegung von $\rho$.

Die Menge der Effekte $\mathcal{E}$ des Qubits ist durch die Menge der hermiteschen $(2 \times 2)$-Matrizen $F$ mit $\mathbf{0} \leq F \leq \mathbf{1}$ bestimmt, wobei $E_F(\rho) = \mathrm{tr}(F\rho) \in [0,1]$ das affine Funktional auf der Blochsphäre ist, das den Effekt darstellt. Zur Menge dieser Operatoren gehören auch die Matrizen der Blochsphäre selbst, denn $\mathbf{0} < \frac{1}{2}\mathbf{1} \leq \rho \leq \mathbf{1}$. Insbesondere sind die $|\psi >< \psi|$, $\|\psi\| = 1$, Effekte. Ist $(|\psi >< \psi|, |\phi >< \phi|)$ ein Antipodenpaar, etwa

$$|\psi >< \psi| = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathbf{e}(\Theta,\Phi)\cdot\sigma), \qquad |\phi >< \phi|) = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{e}(\Theta,\Phi)\cdot\sigma),$$

dann gilt $|\psi >< \psi|\phi >< \phi| = 0$, $|\psi >< \psi| + |\phi >< \phi| = \mathbf{1}$ und die Qubitobservable $\mathbf{e}(\Theta,\Phi)\cdot\sigma$ (bei Spin-$\frac{1}{2}$-Systemen ist diese Opservable das $\frac{4\pi}{h}$-fache der Spinprojektion auf $\mathbf{e}(\Theta,\Phi)$) hat die Spektralzerlegung

$$\mathbf{e}(\Theta,\phi)\cdot\sigma = |\psi >< \psi| - |\phi >< \phi|.$$

Bei Ideealmessung dieser Observablen auf dem Zustand $\rho$ ist $E_{|\psi><\psi|}(\rho)$ die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis 1 und und $E_{|\phi><\phi|}(\rho) = 1 - E_{|\psi><\psi|}(\rho)$ die für das Ergebnis -1. Als lineares Funktional auf $\mathcal{V}$ bestimmt $E_{|\psi><\psi|}(\kappa) = \mathrm{tr}(|\psi >< \psi|\kappa) = p$ eine Hyperebene in $\mathbf{H}$, die bei der Identifikation von $\mathbf{H}$ mit dem $\mathbf{R}^3$ gemäß $b \mapsto b\cdot\sigma$ die Normale $\mathbf{e}(\Theta,\Phi)$ hat. Für $p \in [0,1]$ schneidet diese Hyperebene die Blochkugel in einer Kreisfläche senkrecht zu $\mathbf{e}(\Theta,\phi)$, die der geometrische Ort aller Zustände $\kappa$ ist, für die bei der Messung von $\mathbf{e}(\Theta,\phi)\cdot\sigma$ die Wahrscheinlichkeit $p$ für das Ergebnis 1 ist.

Auch die Zustandsänderungen bei Ideamessungemessungen, sogenannte ideale Messoperationen, lassen sich in diesem Bilde geometrisch deuten. Bei nichtselektiver Idealmessung erster Art, d.h. es wird die Gesamtheit der Systeme betrachtet, die das Messgerät passiert haben, ohne sie nach dem Messergebnis in Untergesamheiten zu sortiert zu sammeln, ist bei Messung von $\mathbf{e}(\Theta,\phi)\cdot\sigma$ die Operation

$$\mathcal{J} : \kappa \mapsto \kappa' = |\psi >< \psi|\kappa|\psi >< \psi| + |\phi >< \phi|\kappa|\phi >< \phi|.$$

Ist $E_{|\psi><\psi|}(\kappa) =< \psi|\kappa|\psi >= p$, dann ist mit der oben betrachteten Identifikation $\kappa'$ der Mittelpunkt der Kreisscheibe aller $\kappa$ mit $E_{|\psi><\psi|}(\kappa) = p$,

$$\kappa' = p|\psi >< \psi| + (1-p)|\phi >< \phi|.$$

Wird selektiert, dann ist nach der Messung der Zustand der Gesamtheit der Systeme, die das Ergebnis 1 hervorgerufen haben $|\psi><\psi|$ und der Zustand der Gesamtheit derjennigen Systeme, die das Ergebnis -1 hervorgerufen haben, $|\phi><\phi|$.

## 2. Mehrteilchensysteme und Verschränktheit

2.1 *Das Tensorprodukt von Hilberträumen* : Der Hilbertraum eines aus $N$ Komponenten zusammengesetzten Systems, die in den Hilberträumen $\mathcal{H}_k$ beschrieben werden, ist das Tensorprodukt $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N$. Das $N$-fache Tensorprodukt ist der komplex-lineare Raum der antilinearen $N$-Formen

$$\Psi : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \times \mathcal{H}_3 \times \cdots \times \mathcal{H}_N \qquad \longrightarrow \qquad \mathbf{C}.$$

Im Gegensatz zu den linearen $N$-Formen gilt für $c, d \in \mathbf{C}$ für jedes Argument, etwa das zweite,

$$\Psi(\varphi_1, (c\varphi_2 + d\chi_2), \ldots, \varphi_N) = \overline{c}\Psi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N) + \overline{d}\Psi(\varphi_1, \chi_2, \ldots, \varphi_N).$$

Sind $M_i$ die Dimensionen der Hilberträume $\mathcal{H}_i$, dann ist die Dimension ihres Tensorproduktes $M = M_1 M_2 M_3 \ldots M_N$.Um dies zu zeigen, betrachten wir in den Hilberträumen $\mathcal{H}_i$ Basen $\{\{\phi_{ik_i}\}_{k_i=0,1,2,,\ldots,M_i-1}\}_{i=1,2,\ldots,N}$. Mit $\varphi_i = \sum_{k_i} a_{ik_i}\phi_{ik_i}$ ist dann

$$\Psi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N) = \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_N} \overline{a}_{1k_1}\overline{a}_{2k_2}\ldots\overline{a}_{Nk_N}\Psi(\phi_{1k_1}, \phi_{2k_2}, \ldots, \phi_{Nk_N}).$$

Die $N$-Form $\Psi$ liegt damit durch das $M$-Tupel $\Psi(\phi_{1k_1}, \phi_{2k_2}, \ldots, \phi_{Nk_N})$ komplexer Zahlen fest, und umgekehrt bestimmt jeses $M$-Tupel kompleser Zahlen genau rine antilineare $N$-Form. Offenbar ist die auf diese Weise konstruierte Abbildung linear, so dass $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N \cong \mathbf{C}^M$ ist. Damit ist die Dimension des Tensorprodukts $M$. Sind die Basen $\{\{\phi_{ik_i}\}_{k_i=0,1,2,\ldots,M_i-1}\}_{i=1,2,\ldots,N}$ auch Orthonormalbasen, dann ist auf dem Tensorprodukt

$$<\Phi, \Psi>:= \sum_{l_1,k_2,\ldots,k_N} \overline{\Phi}(\phi_{1k_1}, \phi_{2k_2}, \ldots, \phi_{Nk_N})\Psi(\phi_{1k_1}, \phi_{2k_2}, \ldots, \phi_{Nk_N})$$

wohldefiniert, d.h. von der Wahl der Orthonormalbasen unabhängig. Es genügt, dies für den Wechsel einer Orthonormalbasis, etwa $\phi_{1k_1} = \sum_{l_1} U_{l_1k_1}\omega_{1l_1}$ zu zeigen, wobei $U_{l_1k_1}$ eine unitäre Matrix ist. Es ist dann

$$
\begin{aligned}
&< \Phi, \Psi >= \sum_{l_1,k_2,\ldots,k_N} \overline{\Phi}(\phi_{1k_1}, \phi_{2k_2}, \ldots, \phi_{Nk_N})\Psi(\phi_{1k_1}, \phi_{2k_2}, \ldots, \phi_{Nk_N}) = \\
&\sum_{l_1,k_2,\ldots,k_N} \sum_{k_1,k_1'} U_{l_1k_1}\overline{\Phi}(\omega_{1k_1}, \phi_{2k_2}, \ldots, \phi_{Nk_N})\overline{U}_{l_1k_1'}\Psi(\omega_{1k_1'}, \phi_{2k_2}, \ldots, \phi_{Nk_N}) = \\
&\sum_{k_2,\ldots,k_N} \sum_{k_1,k_1'} \delta_{k_1k_1'}\overline{\Phi}(\omega_{1k_1}, \phi_{2k_2}, \ldots, \phi_{Nk_N})\Psi(\omega_{1k_1'}, \phi_{2k_2}, \ldots, \phi_{Nk_N}) = \\
&\sum_{k_1k_2,\ldots,k_N} \overline{\Phi}(\phi_{1k_1}, \phi_{2k_2}, \ldots, \phi_{Nk_N})\Psi(\phi_{1k_1}, \phi_{2k_2}, \ldots, \phi_{Nk_N}).
\end{aligned}
$$

Es gilt

$$< \Phi, \Psi >= \overline{< \Psi, \Phi >}$$

und

$$< \Phi, \Phi >= \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_N} |\Phi(\phi_{1k_1}, \phi_{2k_2}, \ldots, \phi_{Nk_N})|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi = 0,$$

$< \Phi, \Psi >$ ist also ein Skalarprodukt. Damit ist $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N$ ein Hilbertraum der Dimension $M = M_1M_2M_3 \ldots M_N$. Treten unendliche Dimensionen auf, dann wird unter dem Tensorprodukt die Vervollständigung des so konstruierten Raumes in der durch das innere Produkt gegebenen Topologie verstanden.

Spezielle antilineare $N$-Formen sind

$$
\begin{aligned}
\psi_1 \otimes \psi_2 \otimes \cdots \otimes \psi_N : \quad & \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \times \cdots \times \mathcal{H}_N \longrightarrow \mathbf{C} \\
& (\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_N) \longrightarrow \\
& \qquad < \varphi_1, \psi_1 >< \varphi_2, \psi_2 > \cdots < \varphi_N, \psi_N >,
\end{aligned}
$$

die in der Quanteninformationstheorie ‘faktorisierend’ oder auch ‘separabel’ genannt werden. Es gilt damit für $c \in \mathcal{C}$

$$c(\psi_1 \otimes \psi_2 \otimes \ldots \psi_N) = \psi_1 \otimes (c\psi_2) \otimes \ldots \psi_N,$$

den Skalarfektor kann die Wellenfunktion einer beliebigen Komponente aufnehmen. Eine faktorisierende Form ist genau dann die Nullform, falls mindestens einer der Faktoren Nullvektor st. Ist $(\psi_{i1}, \psi_{i2}, \psi_{im})$ ein Tupel linear unabhängiger Vektoren aus $\mathcal{H}_i$, d.h.

$$\sum_{k=1}^{m} c_k \psi_{ik} = 0 \quad \Longrightarrow \quad (c_1, c_2, \ldots, c_m) = (0, 0, \ldots, 0),$$

dann gilt. etwa für $i = 2$, wenn $\psi_i \neq 0$ für $i \neq 2$ ist,

$$\sum_{k=1}^{m} c_k \psi_1 \otimes \psi_{2k} \otimes \ldots \psi_N = \psi_1 \otimes (\sum_{k=1}^{m} \psi_{2k}) \otimes \ldots \psi_N = 0$$
$$\Longrightarrow \quad (c_1, c_2, \ldots, c_m) = (0, 0, \ldots, 0).$$

Zwei faktorisierende $n$-Formen $\psi_1 \otimes \psi_2 \otimes \cdots \otimes \psi_N$ und $\varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \cdots \otimes \varphi_N$ sind genau dann lnear unabhängig, wenn $\psi_i, \varphi_i$ linear unabhängig fürmindestens ein $i$ gilt. Analoges gilt auch für die Orthogonalität, denn es ist

$$< \varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \cdots \otimes \varphi_N, \psi_1 \otimes \psi_2 \otimes \cdots \otimes \psi_N >= \prod_{1}^{N} < \varphi_i, \psi_i > .$$

Dies folgt, wenn Orthonormalbasen $\{\{\phi_{ik_i}\}_{k_i=0,1,2,,\ldots,M_i-1}\}_{i=1,2,\ldots,N}$ in den $\mathcal{H}_i$ mit etwa $\phi_{i0} = c_i \psi_i$ zur Berechnung des inneren Produkts verwendet werden, wobei sich zunächst wegen $< \phi_{ik_i}, \psi_i >= 0$ für $k_i \geq 1$

$$< \varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \cdots \otimes \varphi_N, \psi_1 \otimes \psi_2 \otimes \cdots \otimes \psi_N >= \prod_{1}^{N} \overline{< c_i \psi_i, \varphi_i >} < c_i \psi_i, \psi_i > .$$

Aus

$$< c_i \psi_i, \psi_i >= \frac{\bar{c}_i}{|c_i|^2} = \frac{1}{c_i}$$

folgt die Behauptung. Für jedes System $\{\{\phi_{ik_i}\}_{k_i=0,1,2,,\ldots,M_i-1}\}_{i=1,2,\ldots,N}$ von Orthonormalbasen in den $\mathcal{H}_i$ ist

$$\{\phi_{1k_1} \otimes \phi_{2k_2} \otimes \cdots \otimes \phi_{Nk_N}\}_{k_i=0,1,2,,\ldots,M_i-1}$$

eine Orthonormalbasis separabler $N$ Formen in $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N$. Ein Beispiel ist die in Abschnitt 1.1 schon betrachtete Computerbasis

$$|k_1 k_2 k_3 \ldots k_N >= |k_1 > \otimes |k_2 > \otimes |k_3 > \otimes \cdots \otimes |k_N > .$$