Zusammenfassung der 6. Vorlesung (17.05.2010)

Ist

$$\Psi = \sum_{i=0}^{R-1} c_i \psi_i \otimes \varphi_i,$$

die Schmidtdarstellung von Ψ, dann sind die Spektraldarstellungen der partiellen Spuren von $|\Psi >< \Psi|$

$$\mathrm{tr}_2|\Psi >< \Psi| = \sum_{i=0}^{R-1} c_i^2 |\psi_i >< \psi_i|, \quad \mathrm{tr}_1|\Psi >< \Psi| = \sum_{i=0}^{R-1} c_i^2 |\varphi_i >< \varphi_i|.$$

Die partiellen Spuren eines bipartiten reinen Zustands sind also, wenn $c_0 < 1$ ist, v. Neumann Gemische. Ist umgekehrt in einem Hilbertraum $\mathcal{H}_1$ ein v. Neumann Gemisch

$$\rho = \sum_{i=0}^{R-1} \lambda_i |\psi_i >< \psi_i|$$

gegeben, und ist $\mathcal{H}_2$ ein Hilbertraum mit $\dim \mathcal{H}_2 > R$, dann gilt mit einem beliebigen Orthonormalsystem $\{\varphi_i\}_{i=0,1,2,\ldots,(R-1)}$ in $\mathcal{H}_2$

$$\rho = \mathrm{tr}_2 \left(\sum_{i=0}^{R-1} \sqrt{\lambda_i} \psi_i \otimes \varphi_i \right).$$

Der bipartite reine Zustand

$$\Psi = \sum_{i=0}^{R-1} \sqrt{\lambda_i} \psi_i \otimes \varphi_i$$

heißt dann eine *Purifikation* von ρ. Purifikationen sind oft geeignet, um Aussagen über reine Zustände auf auf Aussagen über v. Neumann Gemische zu verallgemeinern.

Messungen an einem Teilsystem, die auch lokale Messungen genannt werden, verändern den Zustand Ψ des Gesamtsystems und beeinflussen damit damit die Statistik von Messergebnissen nachfolgender lokaler Messungen an dem anderen Teilsystem. Die Schmidtdarstellung ermöglicht eine eifache Beschreibung dieses Phänomens für reine bipartite Zustände.

Zunächst soll allgemein an die Zustandsänderung erinnert werden, die durch eine Idealmessung hervorgerufen wird. Gegeben sei eine Gesamtheit von Quantensystemen mit dem reinen Zustand Ψ. Bei Idealmessung einer Observablen mit rein diskretem Spektrum,

$$\mathbf{H} = \sum_i h_i E_i, \quad E_i =^+ E_i = E_i^2, \quad \sum_i E_i = \mathbf{1},$$

tritt der Wert h_i mit der Wahrscheinlichkeit

$$p(h_i) =< \Psi, E_i \Psi >$$

auf. Sortiert man die Gesamtheit der Systeme nach der Messung in Untergesamtheiten nach dem Messwert h_i, den das Objekt hervorgerufen hat, dann hat die zu h_i gehörende Gesamtheit den Zustand

$$\Phi_i = \frac{1}{< \Psi, E_i \Psi >} E_i \Psi.$$

Sei nun Ψ der Zustand des Gesamtsystems und sei

$$A \otimes \mathbf{1} = (\sum_k a_k P_k) \otimes \mathbf{1} = \sum_k a_k (P_k \otimes \mathbf{1}), \quad P = P^+ = P^2, \quad \sum_k P_k = \mathbf{1},$$

$a_i \neq a_k$ für $i \neq k$, eine Observable des ersten Teilsystems, sowie

$$\mathbf{1} \otimes B = \mathbf{1} \otimes (\sum_l b_l Q_l) = \sum_l b_l (\mathbf{1} \otimes Q_l), \quad Q = Q^+ = Q^2, \quad \sum_l Q_l = \mathbf{1},$$

$b_j \neq b_l$ für $j \neq l$, eine Observable des zweiten Teilsystems, dann liegen drei Wahrscheinlichkeitsverteilungen

$$p(a_k) =< \Psi, (P_k \otimes \mathbf{1}) \Psi >, \quad p(b_l) =< \Psi, (\mathbf{1} \otimes Q_l) \Psi >$$

und, weil $A \otimes \mathbf{1}$ mit $\mathbf{1} \otimes Q_l$ vertauscht, auch die kombinierten Wahrscheinlichkeiten

$$p((a_k, b_l)) =< \Psi, (P_k \otimes Q_l) \Psi >$$

fest. Damit sind auch die bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$p(a_k | b_l) = \begin{cases} \frac{p((a_k,b_l))}{p(b_l)} & \text{falls}\, p(b_l) \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \; p(b_l | a_k) = \begin{cases} \frac{p((a_k,b_l))}{p(a_k)} & \text{falls}\, p(b_l) \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Hier ist $p(a_k|b_l)$ die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis a_k bei einer Messung von A am ersten Teilsystem nachdem am zweiten B mit dem Ergebnis b_l gemessen wurde. und $p(b_l|a_k)$ ist entsprechend zu interpretieren.Im Allgemeinen gilt

$$p(a_k) \neq p(a_k|b_l), \quad p(b_l) \neq p(b_l|a_k),$$

und dies beschreibt den Einfluss einer lokalen Messung an einem Teilsystem auf die Statistik nachfolgender lokaler Messungen am anderen. a_k heißt von b_l unabhängig, wenn $p(a_k) = p(a_k|b_l)$ ist. Dann gilt

$$p((a_k, b_l)) = p(a_k)p(b_l)$$

und b_l ist von a_k unabhängig, denn es folgt $p(b_l) = p(b_l|a_k)$. (a, b) ist dann ein unkorreliertes Paar. Ein anderer Extremfall liegt vor, wenn

$$p(a_k|b_l) = 1 \quad \text{und} \quad p(b_l|a_k) = 1$$

ist. In diesem Fall heißt (a_k, b_l) ein strikt korreliertes Paar.

Ein reiner bipartiter Zustand Ψ ist genau dann faktorisierend, wenn der Schmidtkoeffizient $c_0 = 1$ ist. In diesem Fall gilt

$$p((a_k, b_i)) =< \Psi, (P_k \otimes Q_l)\Psi >=< \psi_0, (P_k\psi_0 >< \varphi_0, (Q_0\varphi_0 >= p(a_k)p(b_l)$$

für jedes Paar $((A \otimes \mathbf{1}), (\mathbf{1} \otimes B))$ lokalerObservablen. Alle Eigenwertpaare (a_k, b_l) sind unkorreliert und Ψ heißt *unverschränkt*. Falls $c_0 < 1$ ist, also mehr der einzige Schmidtkoeffizient ist, heißt Ψ *verschränkt*. Es treten dann Korrelationen auf. Wir betrachten zwei Fälle genauer.

(A):Falls die Schmidtkoeffizienten von Ψ paarweise voneinander verschieden sind, gibt es Paare lokaler Observablen $((A\otimes\mathbf{1}), (\mathbf{1}\otimes B))$ für die alle Wertepaare (a_k, b_k) strikt korreliert sind. Der Einfachheit halber betrachten wir als Beispiel das Paar $((A \otimes \mathbf{1}), (\mathbf{1} \otimes B))$ mit

$$A = \sum_1^{R-1} a_k|\psi_k >< \psi_k|, \qquad a_k \neq a_l \text{ für } k \neq l$$

und

$$B = \sum_1^{R-1} b_k|\varphi_k >< \varphi_k|, \qquad b_k \neq b_l \text{ für } k \neq l$$

ist. Es gilt dann

$$p(a_k|b_k) = \frac{< \Psi, (|\psi_k| >< \psi_k| \otimes |\varphi_k >< \varphi_k|)\Psi >}{< \Psi.(\mathbf{1} \otimes |\varphi_k| >< \varphi_k|)\Psi >} = \frac{c_k^2}{c_k^2} = 1$$

und

$$p(b_k|a_k) = \frac{< \Psi, (|\psi_k| >< \psi_k| \otimes |\varphi_k >< \varphi_k|)\Psi >}{< \Psi.(|\psi_k| >< \psi_k| \otimes \mathbf{1})\Psi >} = \frac{c_k^2}{c_k^2} = 1.$$

ImFolgenden soll ein Paar $((A \otimes \mathbf{1}), (\mathbf{1} \otimes B))$ mit diesen Eigenschaften ein in Ψ strikt korreliertes Paar lokaler Observablen genannt werden.

(B): Falls die Schmidtkoeffizenten von Ψ gleich sind, d.h. $c_i = 1/\sqrt{R}$ ist, gilt mit jeder unitären $(R \times R)$-Matrix V_{lk}.

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{R}} \sum_{k=0}^{R-1} \psi_k \otimes \varphi_k = \frac{1}{\sqrt{R}} \sum_{k=0}^{R-1} \left(\sum_{l=0}^{R-1} V_{lk} \psi_l \right) \otimes \left(\sum_{l=0}^{R-1} \overline{V}_{mk} \varphi_m \right).$$

Mit den Definitionen

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_k(V) &:= \sum_{l=0}^{R-1} V_{lk} \psi_l, \qquad & \tilde{A}(V) := \sum_{1}^{R-1} a_k |\tilde{\psi}_k(V) >< \tilde{\psi}_k(V)|, \\ \tilde{\varphi}_k(\overline{V}) &:= \sum_{l=0}^{R-1} \overline{V}_{mk} \varphi_m, \qquad & \tilde{B}(\overline{V}) := \sum_{1}^{R-1} b_k |\tilde{\varphi}_k(\overline{V}) >< \tilde{\varphi}_k(\overline{V})|, \end{aligned}$$

ist nun eine Schar $((\tilde{A}(V) \otimes \mathbf{1}), (\mathbf{1} \otimes \tilde{B}(\overline{V})))$ von in Ψ strikt korrelierten Paaren lokaler Observablen gegeben. Jedes im Fall (A) in Ψ strikt kprrelierte Paar lokaler Observablen liefert im Fall (B) eine $(R^2 - 1)$-parametrige Schar von in Ψ strikt korrelierter Paare lokaler Observablen. Der Grad der Verschränktheit ist im Fall (B) höher als der im Fall (A).

Der Grad der Verschränktheit eines bipartiten reinen Zustabd wird im Allgemeinen mit die Verschräktheitsentropie

$$E(\Psi) = -\sum_{0}^{R-1} c_i^2 \log_M c_i^2$$

gemessen, wobei c_i die Schmidtkoeffizuienten sind und M =min$\{M_1, M_2\}$ das Minimum der Dimensionen, $M_1 = \dim \mathcal{H}_1$ und $M_2 = \dim \mathcal{H}_2$ ist. Es gilt

$$0 \leq E(\Psi) \leq \log_M R \leq 1.$$

Im Falle $c_0 = 1$ ist $E(\psi) = 0$, im Falle $c_i = 1/\sqrt{R}$ ist $E(\Psi) = \log_M R$ und falls überdies $R = M$ gilt, ist $E(\Psi) = 1$.