Zusammenfassung der 12. und 13. Vorlesung (12.11. und 15.11.10)

(*korrigierte Fassung*)

Zum Beweis des Satzes von Plenio und Vedral war noch zu zeigen, dass

$$S'_{\sigma_0}(\sigma) = \frac{1}{\ln 2} < \Psi, \int_0^\infty (\frac{1}{\sigma_0 + t\mathbf{1}}(\sigma_0 - \sigma)\frac{1}{\sigma_0 + t\mathbf{1}})dt\Psi >\geq 0$$

mit $\sigma = |\varphi \otimes \psi >< \varphi \otimes \psi|$ für beliebige $\varphi \in \mathcal{H}_1$, $\psi \in \mathcal{H}_2$, $\|\varphi\| = \|\psi\| = 1$ gilt. Der Integrand des ersten Terms von $S'_{\sigma_0}(\sigma)$ ist

$$\frac{\sigma_0}{(\sigma_0 + t\mathbf{1})^2} = \sum_\nu \frac{c_\nu^2}{(c_\nu^2 + t)^2}|\varphi_\nu \otimes \psi_\nu >< \varphi_\nu \otimes \psi_\nu|.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{c_\nu^2}{(c_\nu^2 + t)^2}dt = \int_0^\infty \frac{1}{(1 + \frac{t}{c_{\nu^2}})^2}\frac{1}{c_{\nu^2}}dt \\ = \quad & \int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^2}dx = -\int_0^\infty (\frac{1}{(1+x)})'dx = 1, \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\ln 2} < \Psi, \int_0^\infty \frac{\sigma_0}{(\sigma_0 + t\mathbf{1})^2}dt\Psi > \\ = \quad & \frac{1}{\ln 2}\sum_\nu | < \Psi|\varphi_\nu \otimes \psi_\nu > |^2 = \frac{1}{\ln 2}\sum_\nu c_\nu^2 = \frac{1}{\ln 2}. \end{aligned}$$

Der Subtrahend in $S'_{\sigma_0}(\sigma)$ ist nach Einsetzen der Schmidtdarstellung für Ψ

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\ln 2}\sum_{\mu\nu} c_\nu c_\mu < \varphi_\nu \otimes \psi_\nu| \int_0^\infty \frac{1}{\sigma_0 + t\mathbf{1}}|\varphi \otimes \psi >< \varphi \otimes \psi|\frac{1}{\sigma_0 + t\mathbf{1}}dt\varphi_\mu \otimes \psi_\mu > \\ & = \frac{1}{\ln 2}\sum_{\mu\nu}\int_0^\infty \frac{c_\nu}{c_\nu^2 + t}\frac{c_\mu}{c_\mu^2 + t}dt < \varphi_\nu \otimes \psi_\nu|\varphi \otimes \psi >< \varphi \otimes \psi|\varphi_\mu \otimes \psi_\mu > . \end{aligned}$$

Nun ist

$$\int_0^\infty \frac{c_\nu}{c_\nu^2 + t}\frac{c_\mu}{c_\mu^2 + t}dt \leq \sqrt{\int_0^\infty \frac{c_\nu^2}{(c_\nu^2 + t)^2}\int_0^\infty \frac{c_\mu^2}{(c_\mu^2 + t)^2}dt} = 1,$$

so dass

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\ln 2} < \Psi, \int_0^\infty \frac{1}{\sigma_0 + t\mathbf{1}} |\varphi \otimes \psi >< \varphi \otimes \psi| \frac{1}{\sigma_0 + t\mathbf{1}} dt \Psi > \\
\leq \quad & \frac{1}{\ln 2} \sum_\nu < \varphi_\nu, \varphi >< \psi_\nu, \psi > \sum_\mu < \varphi, \varphi_\mu >< \psi, \psi_\mu > \\
= \quad & \frac{1}{\ln 2} \left| \sum_\nu < \varphi_\nu, \varphi >< \psi_\nu, \psi > \right|^2 \leq \frac{1}{\ln 2} \left(\sum_\nu | < \varphi_\nu, \varphi >< \psi_\nu, \psi > | \right)^2 \\
\leq \quad & \frac{1}{\ln 2} \left(\sqrt{\sum_\nu | < \varphi_\nu, \varphi > |^2} \sqrt{\sum_\nu | < \psi_\nu, \psi > |^2} \right)^2 \\
\leq \quad & \frac{1}{\ln 2} \|\varphi\|^2 \|\psi\|^2 = \frac{1}{\ln 2}.
\end{aligned}$$

Damit ist $S'_{\sigma_0}(\sigma) \geq \frac{1}{\ln 2}(1-1) = 0$, was noch zu zeigen war.

Man zeigt leicht, dass das v. Neumannsche Verschränktheitsmaß die Forderungen (I) und (II) erfüllt: Die **Eigenschaft (I)** folgt unmittelbar aus der Kleinschen Ungleichung. Die **Eigenschaft (II)** ergibt sich daraus, dass für unitäre Transformationen U und Dichteoperatoren stets $U \log_2(\rho) U^+ = \log_2(U\rho U^+)$ gilt. Damit ist

$$\begin{aligned}
S(U\rho U^+ \| U\sigma U^+) &= \operatorname{tr}(U\rho U^+ (\log_2 U\rho U^+ - \log_2 U\sigma U^+)) \\
&= \operatorname{tr}(U\rho U^+ (U(\log_2 \rho) U^+ - U(\log_2 \sigma) U^+)) = S(\rho\|\sigma)
\end{aligned}$$

durch zyklisches Tauschen unter der Spur. Sei nun $E_{v.N.}(\rho) = S(\rho\|\sigma_0)$, d.h. $\sigma_0 \in \mathcal{D}$ und $S(\rho\|\sigma_0)$ ist der minimaler Wert für $\sigma \in \mathcal{D}$. Dann ist mit $U = U_1 \otimes U_2$ auch $(U_1 \otimes U_2)\sigma(U_1 \otimes U_2)^+ \in \mathcal{D}$ und wegen $S(U\rho U^+ \| U\sigma U^+) = S(\rho\|\sigma)$ ist $S(U\rho U^+ \| U\sigma U^+) = S(\rho\|\sigma)_0$ ebenfalls minimal für $\sigma \in \mathcal{D}$. Also ist $E_{v.N.}(U\rho U^+) = S(U\rho U^+ \| U\sigma U^+) = S(\rho\|\sigma)_0$ und damit $E_{v.N.}(U\rho U^+) = E_{v.N.}(\rho)$.

Um zu zeigen, dass das v. Neumannsche Verschränktheitsmaß auch die Forderung (III) erfüllt, benötigen wir weitere Eigenschaften der relativen Entropie. Zunächst ist zu bemerken, dass die relative Entropie $S(\rho\|\sigma)$ in ρ konvex ist. Wegen der Konkavität der v. Neumann Entropie und der

Linearität der Spur gilt für $\alpha \in [0,1]$

$$\begin{array}{ll} & S(\alpha\rho_1 + (1-\alpha)\rho_2\|\sigma) \\ = & -S(\alpha\rho_1 + (1-\alpha)\rho_2) - \mathrm{tr}((\alpha\rho_1 + (1-\alpha)\rho_2)\log_2\sigma) \\ \leq & -\alpha S(\rho_1) - (1-\alpha)S(\rho_2) - \alpha\mathrm{tr}((\rho_1\log_2\sigma) - (1-\alpha)\mathrm{tr}(\rho_2\log_2\sigma) \\ = & \alpha S(\rho_1\|\sigma) + (1-\alpha)S(\rho_2\|\sigma). \end{array}$$

Eine weitere Eigenschaft behauptet der folgende Satz.

Satz(Elliot Lieb): Seien A, und B selbstadjungierte Operatoren auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$, $\dim\mathcal{H} < \infty$, und $A \geq 0$ sowie $B \geq 0$. Für eien beliebigen Operator X auf $\mathcal{H}$ sei dann $f(A,B) := \mathrm{tr}(X^+A^tXB^{(1-t)})$ mit $t \in [0,1]$. Dann ist $f(A,B)$ in (A,B) kombiniert konkav, d.h. für $\alpha \in [0,1]$ gilt

$$\alpha f(A_1,B_1) + (1-\alpha)f(A_2,B_2) \leq f(\alpha A_1 + (1-\alpha)A_2, \alpha B_1 + (1-\alpha)B_2).$$

Beweis: Wir betrachten zunächst selbtsadjungierte Operatoren $R_i \geq 0, S_i \geq 0$ und $T_i \geq 0$, $i = 1,2$, auf $\mathcal{H}$ für die $R_i \geq S_i + T_i$ und $[R_1,R_2] = [S_1,S_2] = [T_1,T_2] = 0$ gilt. Dann folgt für beliebige $\varphi,\psi \in \mathcal{H}$

$$\begin{array}{ll} & |<\varphi,(S_1^{\frac{1}{2}}S_2^{\frac{1}{2}} + T_1^{\frac{1}{2}}T_2^{\frac{1}{2}})\psi>| \leq \|S_1^{\frac{1}{2}}\varphi\|\|S_2^{\frac{1}{2}}\psi\| + \|T_1^{\frac{1}{2}}\varphi\|\|T_2^{\frac{1}{2}}\psi\| \\ \leq & \sqrt{\|S_1^{\frac{1}{2}}\varphi\|^2 + \|T_1^{\frac{1}{2}}\varphi\|^2}\sqrt{\|S_2^{\frac{1}{2}}\psi\|^2 + \|T_2^{\frac{1}{2}}\psi\|^2} \\ = & \sqrt{<\varphi,(S_1+T_1)\varphi>}\sqrt{<\psi,(S_2+T_2)\psi>} \\ \leq & \sqrt{<\varphi,R_1\varphi>}\sqrt{<\psi,R_2\psi>}. \end{array}$$

Sei nun E_1 der Täger von R_1 und E_2 der Träger von R_2, d.h. $(1-E_1)$, $i = 1,2$, ist jeweilig der maximale Projektionsoperator, für den $(1-E_i)R_i = R_i(1-E_i) = 0$ gilt. Weil $[R_1,R_2] = 0$ ist. folgt $[E_1,E_2] = 0$. Ist $(1-E_1E_2)\varphi = \varphi$ oder $(1-E_1E_2)\psi = \psi$, dann folgt aus der oben stehenden Ungleichung $<\varphi,(S_1^{\frac{1}{2}}S_2^{\frac{1}{2}} + T_1^{\frac{1}{2}}T_2^{\frac{1}{2}})\psi>= 0$. Deshalb muss der Träger von $(S_1^{\frac{1}{2}}S_2^{\frac{1}{2}} + T_1^{\frac{1}{2}}T_2^{\frac{1}{2}})$ unter E_1E_2 liegen, also gilt

$$E_1E_2(S_1^{\frac{1}{2}}S_2^{\frac{1}{2}} + T_1^{\frac{1}{2}}T_2^{\frac{1}{2}})E_1E_2 = (S_1^{\frac{1}{2}}S_2^{\frac{1}{2}} + T_1^{\frac{1}{2}}T_2^{\frac{1}{2}}).$$

Da R_i auf $E_i\mathcal{H}$ bijektiv operiert, gibt es Operatoren $\hat{R}_i$ mit $\hat{R}_iE_iR_iE_i = E_i$. Unter Missbrauch der Sprache nennen wir die eindeutigen Operatoren

$E_i\hat{R}_iE_i =: R_i^{-1}$. Diese sind ebenfalls positiv. Sei nun V eine zunächst beliebige unitäre Transformation auf $\mathcal{H}$ und $\chi \in \mathcal{H}$ beliebig. Für $\varphi = R_1^{-\frac{1}{2}}V\chi$ und $\psi = R_2^{-\frac{1}{2}}\chi$ gilt dann

$$\begin{aligned} & | < \chi, V^+R_1^{-\frac{1}{2}}(S_1^{\frac{1}{2}}S_2^{\frac{1}{2}} + T_1^{\frac{1}{2}}T_2^{\frac{1}{2}})R_2^{-\frac{1}{2}}\chi > | \\ \leq \quad & \sqrt{< \chi, V^+E_1V\chi >}\sqrt{< \chi, E_2\chi >} \leq \|\chi\|^2. \end{aligned}$$

Sei nun

$$C := R_1^{-\frac{1}{2}}(S_1^{\frac{1}{2}}S_2^{\frac{1}{2}} + T_1^{\frac{1}{2}}T_2^{\frac{1}{2}})R_2^{-\frac{1}{2}} = U\sqrt{C^+C},$$

wobei rechts die Polardarstellung von C steht. Mit der Verfügung $V = U$ ergibt sich dann für beliebiges $\chi \in \mathcal{H}$

$$| < \chi, U^+C\chi > | =< \chi, \sqrt{C^+C}\chi >=< \chi, |C|\chi >\leq \|\chi\|^2.$$

Sei nun $D := R_2^{\frac{1}{4}}R_1^{-\frac{1}{4}}$ Aus $[R_1, R_2] = 0$ folgt $D = D^+ \geq 0$ und $D^{-1} = R_2^{-\frac{1}{4}}R_1^{\frac{1}{4}}$. Damit ist

$$D^{-1}CD = R_2^{-\frac{1}{4}}R_1^{-\frac{1}{4}}(S_1^{\frac{1}{2}}S_2^{\frac{1}{2}} + T_1^{\frac{1}{2}}T_2^{\frac{1}{2}})R_1^{-\frac{1}{4}}R_2^{-\frac{1}{4}} \geq 0,$$

denn aus $[S_1, S_2] = 0$ folgt $S_1^{\frac{1}{2}}S_2^{\frac{1}{2}} = S_1^{\frac{1}{4}}S_2^{\frac{1}{2}}S_1^{\frac{1}{4}} \geq 0$ und analog $T_1^{\frac{1}{2}}T_2^{\frac{1}{2}} \geq 0$. Andererseits ist für beliebiges $\chi \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} & 0 \leq< \chi, D^{-1}CD\chi >\leq \|\chi\|\|D^{-1}CD\chi\| \leq \|\chi\|\|D^{-1}\|\|C\|\|D\|\|\chi\| \\ & \leq \||C|\|\|\chi\|^2 \leq \sup_{\phi\in\mathcal{H}} \frac{< \phi, |C|\phi >}{\|\phi\|^2}\|\chi\|^2 \leq \|\chi\|^2. \end{aligned}$$

Damit ist

$$0 \leq D^{-1}CD \leq 1$$

und also

$$E_1E_2(S_1^{\frac{1}{2}}S_2^{\frac{1}{2}} + T_1^{\frac{1}{2}}T_2^{\frac{1}{2}})E_1E_2 = (S_1^{\frac{1}{2}}S_2^{\frac{1}{2}} + T_1^{\frac{1}{2}}T_2^{\frac{1}{2}}) \leq R_1^{\frac{1}{2}}R_2^{\frac{1}{2}}.$$

(Fortsetzung des Beweises folgt.)