Zusammenfassung der 15. Vorlesung (22.11.2010)

Mit Hilfe der kombinierten Konvexität der relativen Entropie $S(\rho\|\sigma)$ in (ρ, σ) kann man für ideale Messoperationen erster Art den folgenden Satz beweisen. Im Blick auf die Kleinsche Ungleichung sagt dieser Satz aus, dass zwei Zustände einander "ähnlicher"' werden, wenn man sie der gleichen idealen Operation unterwirft.

Satz: Seien P_ν Orthogonalprojektoren, $P_\nu = P_\nu^+ = P_\nu^2$, die eine Zerlegung des Einsoperators bilden, $\sum_{\nu=1}^{M'} P_\nu = \mathbf{1}$, und $\mathcal{J} : \rho \mapsto \sum_{\nu=1}^{M'} P_\nu \rho P_\nu$ die zugehörige ideale Operation, dann gilt $S(\mathcal{J}\rho\|\mathcal{J}\sigma) \leq S(\rho\|\sigma)$.

Beweis: Mit einem Orthogonalprojektor Q sei $U := 2Q - \mathbf{1}$, dann gilt $UU^+ = 4Q - 4Q + \mathbf{1} = \mathbf{1}$, d. h. U ist unitär. Überdies gilt, und das ist entscheidend für die Ausnutzung der kombinierten Konvexität:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\rho + \frac{1}{2}U\rho U^+ &= \frac{1}{2}\rho + 2Q\rho Q - \rho Q - Q\rho + \frac{1}{2}\rho \\
&= Q\rho Q + Q\rho Q - Q\rho - \rho Q + \rho \\
&= Q\rho Q + Q\rho(Q - \mathbf{1}) + \rho(\mathbf{1} - Q) \\
&= Q\rho Q - Q\rho(\mathbf{1} - Q) + \rho(\mathbf{1} - Q) \\
&= Q\rho Q + (\rho - Q\rho)(\mathbf{1} - Q) \\
&= Q\rho Q + (\mathbf{1} - Q)\rho(\mathbf{1} - Q).
\end{aligned}
$$

Sei nun für $(N = 1, 2, \ldots, M')$

$$
Q_N := \sum_1^N P_\mu \quad \text{und} \quad \mathcal{J}_N : \tau \mapsto Q_N \tau Q_N + (\mathbf{1} - Q_N)\rho(\mathbf{1} - Q_N),
$$

dann gelten für $N \geq N'$ die Beziehungen

$$
\begin{aligned}
&Q_N Q_{N'} = Q_{N'}, \qquad && Q_N(\mathbf{1} - Q_{N'}) = Q_N - Q_{N'} = \sum_{\mu=N'+1}^{N} P_\mu, \\
&(\mathbf{1} - Q_N)Q_{N'} = 0 && (\mathbf{1} - Q_N)(\mathbf{1} - Q_{N'}) = (\mathbf{1} - Q_N)
\end{aligned}
$$

Aus diesen Beziehungen folgt

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_2\mathcal{J}_1\rho &= \mathcal{J}_2(P_1\rho P_1 + (\mathbf{1}-P_1)\rho(\mathbf{1}-P_1)) \\
&= Q_2(P_1\rho P_1 + (\mathbf{1}-P_1)\rho P_1(\mathbf{1}-P_1))Q_2 \\
&\quad +(\mathbf{1}-Q_2)(P_1\rho P_1 + (\mathbf{1}-P_1)\rho(\mathbf{1}-P_1)(\mathbf{1}-Q_2)) \\
&= P_1\rho P_1 + P_2\rho P_2 + 0 + (\mathbf{1}-Q_2)\rho(\mathbf{1}-Q_2).
\end{aligned}$$

Die Rekursion, dass für $N < M'$

$$\mathcal{J}_N\mathcal{J}_{N-1}\ldots\mathcal{J}_1\rho = \sum_1^N P_\mu\rho P_\mu + (\mathbf{1}-Q_N)\rho(\mathbf{1}-Q_N)$$

gilt, wird durch den Schluss von N auf $N+1$ bestätigt. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\mathcal{J}_{N+1}\mathcal{J}_N\ldots\mathcal{J}_1\rho \\
= \;& Q_{N+1}(\sum_1^N P_\mu\rho P_\mu + (\mathbf{1}-Q_N)\rho(\mathbf{1}-Q_N))Q_{N+1} \\
&+(\mathbf{1}-Q_{N+1})(\sum_1^N P_\mu\rho P_\mu + (\mathbf{1}-Q_N)\rho(\mathbf{1}-Q_N))(\mathbf{1}-Q_{N+1}) \\
= \;& \sum_1^N P_\mu\rho P_\mu + P_{N+1}\rho P_{N+1} + 0 + (\mathbf{1}-Q_{N+1})\rho(\mathbf{1}-Q_{N+1}),
\end{aligned}$$

und wegen $Q_{M'} = \mathbf{1}$ gilt

$$\mathcal{J}\rho = \mathcal{J}_{M'}\mathcal{J}_{M'-1}\ldots\mathcal{J}_1\rho.$$

Mit $U_N := 2Q_N - 1$, $\rho_N = \mathcal{J}_N\mathcal{J}_{N-1}\ldots\mathcal{J}_1\rho$ und $\sigma_N = \mathcal{J}_N\mathcal{J}_{N-1}\ldots\mathcal{J}_1\sigma$ gilt

$$\begin{aligned}
S(\mathcal{J}\rho\|\mathcal{J}\sigma) &= S(\mathcal{J}_{M'}\mathcal{J}_{M'-1}\ldots\mathcal{J}_1\rho\|\mathcal{J}_{M'}\mathcal{J}_{M'-1}\ldots\mathcal{J}_1\rho) \\
&= S(\mathcal{J}_{M'}\rho_{M'-1}\|\mathcal{J}_{M'}\sigma_{M'-1}) \\
&= S(Q_{M'}\rho_{M'-1}Q_{M'} + (\mathbf{1}-Q_{M'}))\rho_{M'-1}(\mathbf{1}-Q_{M'})\| \\
&\qquad\qquad Q_{M'}\sigma_{M'-1}Q_{M'} + (\mathbf{1}-Q_{M'}))\sigma_{M'-1}(\mathbf{1}-Q_{M'})) \\
&= S(\frac{1}{2}\rho_{M'-1} + \frac{1}{2}U_{M'}\rho_{M'-1}U^+_{M'}\|\frac{1}{2}\sigma_{M'-1} + \frac{1}{2}U_{M'}\sigma_{M'-1}U^+_{M'}) \\
&\leq \frac{1}{2}S(\rho_{M'-1}\|\sigma_{M'-1}) + \frac{1}{2}S(U_{M'}\rho_{M'-1}U^+_{M'}\|U_{M'}\sigma_{M'-1}U^+_{M'}) \\
&= S(\rho_{M'-1}\|\sigma_{M'-1}) \\
&= S(\mathcal{J}_{M'-1}\rho_{M'-2}\|\mathcal{J}_{M'+1}\sigma_{M'-2}) \leq \ldots\ldots\ldots \\
&\leq S(\rho\|\sigma),
\end{aligned}$$

was behauptet worden war.

Nun lassen lokale Operationen $\mathcal{J}_1 \otimes \mathcal{J}_2$ auf bipartiten Systemen die Menge der unverschränkten Zustände $\mathcal{D}$ invariant, denn

$$\begin{aligned}(\mathcal{J}_1 \otimes \mathcal{J}_2)|\varphi \otimes \psi >< \varphi \otimes \psi| &= (\mathcal{J}_1 \otimes \mathcal{J}_2)(|\varphi >< \varphi| \otimes |\psi >< \psi|) \\ &= (\mathcal{J}_1|\varphi >< \varphi|) \otimes (\mathcal{J}_2)|\psi >< \psi|).\end{aligned}$$

Daraus folgt unmittelbar

$$E_{v.N.}((\mathcal{J}_1 \otimes \mathcal{J}_2)\rho) \leq S((\mathcal{J}_1 \otimes \mathcal{J}_2)\rho \| (\mathcal{J}_1 \otimes \mathcal{J}_2)\sigma_0) \leq S(\rho\|\sigma_0) = E_{v.N.}(\rho),$$

wobei $\sigma_0 \in \mathcal{D}$ ein unverschränkter Zustand ist, für den $S(\rho\|\sigma_0)$ minimal ist. Damit ist gezeigt, dass lokale ideale Operationen die v.Neumann Verschänktheit nicht erhöhen können. Dies soll jedoch für alle lokalen Operationen gelten.

Ein direkter Beweis der gewünschten Aussage von A. Uhlmann [Commun. Math. Phys. 54, 21-32 (1977)] knüpft an die in A konkave Funktion $\mathrm{tr}(X^+ A^t X A^{1-t} - X X^+ A)$ an, mit deren Hilfe wir die kombinierte Konvexität von $S(\rho\|\sigma)$ erschlossen haben. Eine an unsere Darstellung angepasste Formulierung dieses Beweises soll anschließend oder in einem Nachtrag zu dieser Zusammenfassung gegeben werden.