Zusammenfassung der 21. Vorlesung (14.01.08)

5 *Lokale Messoperationen mit klassischer Kommunikation*:

5.1 *Messoperationen*:

Den Begriff Messoperation oder Quantenmessung haben wir schon mehrfach verwendet, aber den damit verbundenen Vorgang nicht genauer betrachtet. Dies soll nun geschehen.

Zunächst beschränken wir uns auf rein quantenmechanische Betrachtungen. Das Objekt, an dem gemessen werden soll, sei in dem Hilbertraum $\mathcal{H}_O$ beschrieben, und ein anderes Quantensystem, später der Messapparat, in dem Hilbertraum $\mathcal{H}_D$. Vor Beginn des Prozesses sollen die Systeme frei sein und sich in dem faktorisierenden Zustand $\rho \otimes \sigma_0$, wobei ρ der Zustand des Objekts und σ_o der des zweiten Systems ist, befinden. Die Wechselwirkung sollte eigentlich eine endliche Dauer haben, dies ist jedoch bei Wechselwirkungen mit unendlicher Reichweite nicht erfüllbar. Wir fordern statt desseb nur, dass die Systeme asymptotisch zu frühen und späten Zeiten frei sind, wie es von Streuprozessen bekannt ist. Von daher ist die Beschreibung durch einen S-Operator bekannt, der das Resultat dieses Prozesses durch eine unitäre Zustandsänderung

$$\rho \otimes \sigma_0 \quad \longmapsto \quad S(\rho \otimes \sigma_0)S^+$$

beschreibt. Wird nun die durch $D = D^+ = \sum_k kE_k$ auf $\mathcal{H}_D$, $E_k = E_k^+ = E_k^2$, $\sum_k E_k = \mathbf{1}$ dargestellte Observable am zweiten System gemessen, dann tritt der Wert k mit der Wahrscheinlichkeit

$$p_k = \mathrm{tr}((\mathbf{1} \otimes E_k)S(\rho \otimes \sigma_0)S^+)$$

auf, und im Falle des Auftretens von k gehört das Gesamtsystem der Gesamtheit an, die mit dem Dichteoperator

$$\frac{1}{p_k}(\mathbf{1} \otimes E_k)S(\rho \otimes \sigma_0)S^+(\mathbf{1} \otimes E_k)$$

beschrieben wird. Durch Selektion nach dem Auftreten eines gewissen k kann diese Gesamtheit präpariert werden. Die Wahrscheinlichkeiten bei nachfolgenden Messungen am Objekt werden dann durch den reduzierten Dichteoperator

$$\rho_k = \mathrm{tr}_D(\frac{1}{p_k}(\mathbf{1} \otimes E_k)S(\rho \otimes \sigma_0)S^+(\mathbf{1} \otimes E_k))$$

auf $\mathcal{H}_O$ bebestimmt.

Bevor wir die auf das Objekt reduzierte Operation berechnen, soll noch auf eitere Idealisierungen, die der vorstehende Ansatz enthält hingewiesen werden. Das zweite System sollte so beschaffen sein, dass direkt beobachtbare Eigenschaften, makroskopische Effekte, durch die Wechselwirkung mit dem Quantensystem hervorgerufen werden können. Im Allgemeinen wird dieses zweite System deshalb ein Vielteilchensytem sein, das mit der statistischen Thermodynamik zu beschreiben ist. Dabei geht man davon aus, dass der Dichteoperator σ_0 ein "metastabiles" Gleicchgewicht beschreibt, d.h. seine Entropie ein schwach ausgeprägtes relatives Maximum annimmt. Das Objekt zerstört dieses Gleichgewicht und in Abhängigkeit von der Störung läuftt das 2. System irreversibel in ein anderes Gleichgewicht, das direkt beobachtet werden kann. Die Spektraloperatoren E_k bilden eine Zerlegung des Hilbertraumes, die zu einer "maroskopischen" Observable direkt beobachtbarer Eigenschaften das 2. Systems gehört, wobei etwa $\sigma_0 = E_1\sigma_0 E_1$ ist. Der irreversible Prozess kann sicher nicht surch eine unitäre Matrix beschrieben werden, sondern durch eine "Mastergleichung". Jedoch gehen von S nur die Teile $e_1 S E_k$ in die auf das Objekt reduzierte Beschreibung ein, die auch das Ergebnis eines stochastischen Prozesses ein können.

Nun ist mit $E_k = \sum_{j_k} |\psi_{kj_k} >< \psi_{kj_k}|$, der Spektraldarstellung $\sigma_0 = \sum_{m=1}^K s_m |\phi_m >< \phi_m|$, einer Orthonormalbasis $\{\phi_\alpha\}$ von $\mathcal{H}_D$, deren erste Elemente, $k = 1, 2, \ldots, K$, die Eigenvektoren von σ_0 sind, und einer beliebigen Orthonormalbasis $\{\varphi_\nu\}$ von $\mathcal{H}_O$:

$$
\begin{aligned}
p_k\rho_k &= \mathrm{tr}_D((\mathbf{1}\otimes E_k)S(\rho\otimes\sigma_0)S^+(\mathbf{1}\otimes E_k)) \\
&= \sum_{\nu,\mu,j_k} |\varphi_\nu >< \varphi_\nu \otimes \psi_{kj_k}|S(\rho\otimes\sigma_0)S^+\varphi_\mu\otimes\psi_{kj_k} >< \varphi_\mu| \\
&= \sum_{\nu,\mu,j_k} |\varphi_\nu >< \varphi_\nu \otimes \psi_{kj_k}|S(\mathbf{1}\otimes\sqrt{\sigma_0})(\rho\otimes\mathbf{1}) \\
&\quad (\mathbf{1}\otimes\sqrt{\sigma_0})S^+\varphi_\mu\otimes\psi_{kj_k} >< \varphi_\mu| \\
&= \sum_{\nu,\mu,j_k}\sum_{m,n=1}^{K} |\varphi_\nu >< \varphi_\nu \otimes \psi_{kj_k}|S(\mathbf{1}\otimes\sqrt{s_m}|\phi_m >< \phi_m|) \\
&\quad \sum_{\sigma,\alpha} |\varphi_\sigma\otimes\phi_\alpha >< \varphi_\sigma\otimes\phi_\alpha|(\rho\otimes\mathbf{1}) \sum_{\sigma',\beta} \varphi_{\sigma'}\otimes\phi_\beta >< \varphi_{\sigma'}\otimes\phi_\beta| \\
&\quad (\mathbf{1}\otimes\sqrt{s_n}|\phi_n >< \phi_n|)S^+\varphi_\mu\otimes\psi_{kj_k} >< \varphi_\mu|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_k\rho_k &= \sum_{\nu,\mu,\sigma,\sigma',j_k} \sum_{m,n=1}^{K} |\varphi_\nu >< \varphi_\nu \otimes \psi_{kj_k}|S\sqrt{s_m}\varphi_\sigma \otimes \phi_m > \\
&\quad < \varphi_\sigma \otimes \phi_m|(\rho \otimes \mathbf{1})\varphi_{\sigma'} \otimes \phi_n > \\
&\quad < \varphi_{\sigma'} \otimes \phi_n|\sqrt{s_n}S^+\varphi_\mu \otimes \psi_{kj_k} >< \varphi_\mu| \\
&= \sum_{\nu,\mu,\sigma,\sigma',j_k} \sum_{m=1}^{K} s_m|\varphi_\nu >< \varphi_\nu \otimes \psi_{kj_k}|S\varphi_\sigma \otimes \phi_m >< \varphi_\sigma|\rho\varphi_{\sigma'} > \\
&\quad < \varphi_{\sigma'} \otimes \phi_m|S^+\varphi_\mu \otimes \psi_{kj_k} >< \varphi_\mu|.
\end{aligned}
$$

In die reduzierte Berschreibung gehen nur die auf $\mathcal{H}_O$ wirkenden Operatoren

$$
A_{km} := \sum_{\nu,\sigma,j_k,} |\varphi_\nu >< \varphi_\nu \otimes \psi_{kj_k}|S\varphi_\sigma \otimes \phi_m >< \varphi_\sigma|
$$

ein. Es ist

$$
p_k\rho_k = \sum_m s_m A_{km}\rho A_{km}^+, \quad s_m \geq 0, \qquad \sum_m s_m = 1,
$$

d.h. die durch Selektion nach den direkt beobachtbaren (angezeigten) Eigenschaften am zweiten System präparierten Gesamtheiten sind im Allgemeinen v. Neumann Gemische

$$
\rho_k = \sum_m s_m(\frac{1}{p_m}A_{km}\rho A_{km}^+)
$$

der Dichteoperatoren

$$
\rho_{km} := \frac{1}{p_m}A_{km}\rho A_{km}^+.
$$

ρ_{km} sind trivialerweise positiv und haben wegen $1 = \mathrm{tr}\rho_k = 1 = \sum_m s_m \mathrm{tr}\rho_{km}$ auch die Spur 1. Bemerke, dass nur die ρ_k eindeutig bestimmt sind, die ρ_{km} sind es ebensoweinig wie die reinen Zerlegungen von σ_0 und ferner, dass die k “angezeugt” werden, nicht aber die m. Wird keine Selektion ausgführt, dann ist der Zustand des Objekts nach der Reaktion mit dem zweiten System

$$
\begin{aligned}
\rho' = \sum_k p_k\rho_k &= \mathrm{tr}_D\left(\sum_k((\mathbf{1} \otimes E_k)S(\rho \otimes \sigma_0)S^+(\mathbf{1} \otimes E_k))\right) \\
&= \mathrm{tr}_D\left(\sum_{k,l}((\mathbf{1} \otimes E_k)S(\rho \otimes \sigma_0)S^+(\mathbf{1} \otimes E_l))\right) \\
&= \mathrm{tr}_D\left(S(\rho \otimes \sigma_0)S^+\right),
\end{aligned}
$$

so dass

$$\mathrm{tr}\rho' = \mathrm{tr}_0\mathrm{tr}_D\left(S(\rho\otimes\sigma_0)S^+\right) = \mathrm{tr}\left(S(\rho\otimes\sigma_0)S^+\right) = \mathrm{tr}\left((\rho\otimes\sigma_0)\right) = 1$$

ist. Wegen $p_k \geq 0$ und $\sum_k p_k = 1$ ist

$$1 = \mathrm{tr}\sum_k p_k\rho_k = \mathrm{tr}(\sum_{k,m} s_m A_{k,m}\rho A^+_{k,m}) = \mathrm{tr}(\sum_{k,m} s_m A^+_{k,l,j_l} A_{k,m})\rho)$$

und, weil ρ ein beliebiger Dichteoperator ist, folgt

$$\sum_{k,m} s_m A^+_{k,m}A_{k,m} = \mathbf{1}.$$

Überdies gilt wegen $s_m \geq 0$ und $\sum_m s_m = 1$ für alle m auch

$$\sum_k A^+_{k,m}A_{k,m} = \mathbf{1}.$$

Wir fassen zusammen: Die **ohne Selektion** auf das Objekt reduzierte Wirkung ist die affine Abbildung

$$\rho \mapsto \mathcal{I}(\rho) = \rho' = \sum_{k,m} s_m A_{k,m}\rho A^+_{k,m}$$

der Dichteoperatoren auf $\mathcal{H}_O$ auf sich, wobei

$$s_m \geq 0, \quad \sum_m s_m = 1 \qquad \text{und} \qquad \sum_k A^+_{k,m}A_{k,m} = \mathbf{1}$$

ist. Bei jeder Anwendung tritt genau ein direkt beobachtbarer Effekt E_k auf, der dem Wert k der Observablen D des zweiten Systems entspricht. Die Observable D wued deshalb auch Zeigerobservable genannt. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist

$$\begin{aligned} p_k &= \mathrm{tr}((\mathbf{1}\otimes E_k)S(\rho\otimes\sigma_0)S^+) \\ &= \mathrm{tr}_0\mathrm{tr}_D((\mathbf{1}\otimes E_k)S(\rho\otimes\sigma_0)S^+) \\ &= \mathrm{tr}_0\sum_m s_m\rho A^+_{k,m}A_{k,m} = \mathrm{tr}_0 A^+_{k,m}\rho A_{k,m}. \end{aligned}$$

Die Untergesamtheit derjenigen Objekte, die den Wert k hervorgerufen haben, kann durch **Selektion** präpariert werden. Die reduzierte Wirkung ist dann

$$\rho \mapsto \mathcal{I}_k(\rho) = \rho_k = \frac{1}{p_k} \sum_m s_m A_{k,m} \rho A^+_{k,m}$$

Die affine Abbildung $\mathcal{I}$ heißt **nichtselektive Messoperation**, die affinen Abbildungen $\mathcal{I}_k$ heißen **selektive Messoperation**. Durch die Messoperation wird eine Observable des Objekts definiert, deren Wertevorrat (Spektrum) der der Zeigeobservablen ist. Die definierte Observable wird jedoch nicht durch ein projektionswertiges (PV) Maß bestimmt, sondern durch ein positiv operatorwerttiges (POV) Maß, das für beliebiges m durch die positiven Operatoren

$$A^+_{k,m} A_{k,m} \quad \text{mit} \qquad \sum_{k,m} A^+_{k,m} A_{k,m} = \mathbf{1}$$

bestimmt ist. Solche Observablen werden gelegentlich *generalisiert*, *unscharf* oder auch *fuzzy* genannt.

Die von uns bisher verwendete Form der Messperation:

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(\rho) &= \sum_\kappa A_\kappa \rho A^+_\kappa, \quad \sum_\kappa A^+_\kappa A_\kappa = \mathbf{1} \quad \text{ohne Selektion,} \\
\mathcal{J}_\kappa(\rho) &= \frac{1}{p_k} A_\kappa \rho A^+_\kappa, \quad p_\kappa = \mathrm{tr}_0(A^+_\kappa \rho A_\kappa) \quad \text{mit Selektion,}
\end{aligned}$$

stellt schon einen Spezialfall dar. Hier stimmen die Reinheitsgrade von ρ und $\mathcal{J}(\rho)$ überein, wenn für ein κ gilt $p_\kappa = 1$, aber für $p_k = 1$ hat $\mathcal{I}(\rho)$ im Allgemeinen einen kleineren Reiheirsgrad als ρ. Hier wird die Dekohärenz allein durch die Beobachtbarkeit der Effekte verursacht, was unvermeidlich ist. Wir wollen die Operationen mit diser Eigenschaft, also $\mathcal{J}$ und $\mathcal{J}_\kappa$, deshalb im Folgenden **optimal kohärenzerhaltend** (OCP) nennen.

Eine andere Klasse von Messoperationen ist durch

$$A^+_{km} A_{km} = (A^+_{km} A_{km})^2 =: F_k$$

ausgezeichnet. Wegen

$$\sum_k F_k = \mathbf{1}$$

sind die Projektionsoperatoren F_k paarweise orthogonal. In diesem Fall wird die zugehörige Observalbe durch ein PV Maß definiert. Die gemessene Observable ist also “scharf”.Die Messoperationen dieser Klasse sind aber nicht notwendig OCP.

Die Klasse der idealen Messoperationen ist durch

$$A_{km} = A_{km}^+ = A_{km}^2 =: F_k.$$

Mit den Projektionsoperatoren F_k gelten dann die allgemein bekannten Formeln

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\rho) &= \sum_\kappa F_\kappa \rho F_\kappa, \quad \sum_\kappa F_\kappa = \mathbf{1} \quad \text{ohne Selektion,} \\ \mathcal{J}_\kappa(\rho) &= \frac{1}{p_\kappa} F_\kappa \rho F_\kappa, \quad p_\kappa = \mathrm{tr}_0(F_\kappa \rho) \quad \text{mit Selektion,} \end{aligned}$$

Den folgenden Darstellungssatz kann man konstruktiv beweisen.

Satz: Seien A_{km} lineare Operatoren auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}_O$ und sei $\sum_k A_{km}^+ A_{km} = \mathbf{1}$, $m = 1, 2, \ldots, K$. Genau dann gibt es einen Hilbertraum $\mathcal{H}_D$, ein Orthonormalsystem reiner Zustände $|\phi_m >< \phi_m|$, $m = 1, 2, \ldots, K$, und eine Observable $D = D^+ = \sum_k kE_k$, auf $\mathcal{H}_D$, sowie einen unitären Operator S auf $\mathcal{H}_O \otimes \mathcal{H}_D$, so dass mit $E_k = \sum_{j_k}$

$$< \varphi_\mu, A_k \varphi_\nu >= \sum_{j_k} < \varphi_\mu \otimes \psi_{k,j_k}, S\varphi_\nu \otimes \phi_m > \qquad (m = 1, 2, \ldots, K)$$

gilt.

Dies bedeutet jedoch nicht, dass man jede Operation auch technisch herstellen kann. Die Objekte und ihre Wechselwirkung sind naturgegeben, ebenso die Vielteilchensysteme, mit denen sie reagieren können. Man wird also in der Wirklichkeit mit nichtidealen Messoperationen arbeiten müssen.

Eine allgemeine Bemerkung soll noch hinzugefügt werden. Operationen sind positive, affine, spurerhaltende Abbildungen der Dichteoperatoren eines Hilbertraumes auf sich. Jede Operation $\mathcal{J}$ gehört damit zur Klasse linearer, positiver und in der Spurnorm stetiger Abbildungen der Spurklasseoperatoren eines Hilbertraumes $\mathcal{H}_1$ auf sich an. Man kann fragen, ob die auf $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, wobei $\mathcal{H}_2$ ein Hilbertraum der Dimension m ist, durch

$\mathcal{J} \otimes \mathbf{1}$ definierte lineare Abbildung ebenfalls positiv ist. Erstaunlicher Weise ist dies im Allgemeinen nicht der Fall. Man nennt diejenigen $\mathcal{J}$, für die $\mathcal{J} \otimes \mathbf{1}$ für $m \leq n$ positiv ist, *n-positiv*, und wenn $\mathcal{J} \otimes \mathbf{1}$ für beliebiges $m = \dim \mathcal{H}_2$ positiv ist *vollständig positiv.* Bezogen auf die ganze Welt, ist eine Quantenoperation ein lokaler Vorgang und sollte unabhängig davon, ob er in $\mathcal{H}_O$ oder $\mathcal{H}_O \otimes \mathcal{H}_R$, wobei $\mathcal{H}_R$ der Hilbertraum ist, in dem die übrigen Welt zu beschreiben ist, durch eine positive Abbildung beschrieben werden. $\mathcal{J}$ nuss deshalb eine vollständig positive Abbildung sein. Aus einem Satz von Stinespring folgt, dass die vollständig positiven Abbildungen der Spurklasseoperatoren eines Hilbertraums in sich durch die Darstellung $B \mapsto \sum_k C_\kappa B C_\kappa^+$ mit linearen Operatoren C_k auf dem Hilbertraum, $\sum_\kappa C_\kappa^+ C_\kappa \leq c\mathbf{1}$, $c < \infty$ charakterisiert sind. Quantenoperationen gehören damit zur Klasse der vollständig positiven Abbildungen.