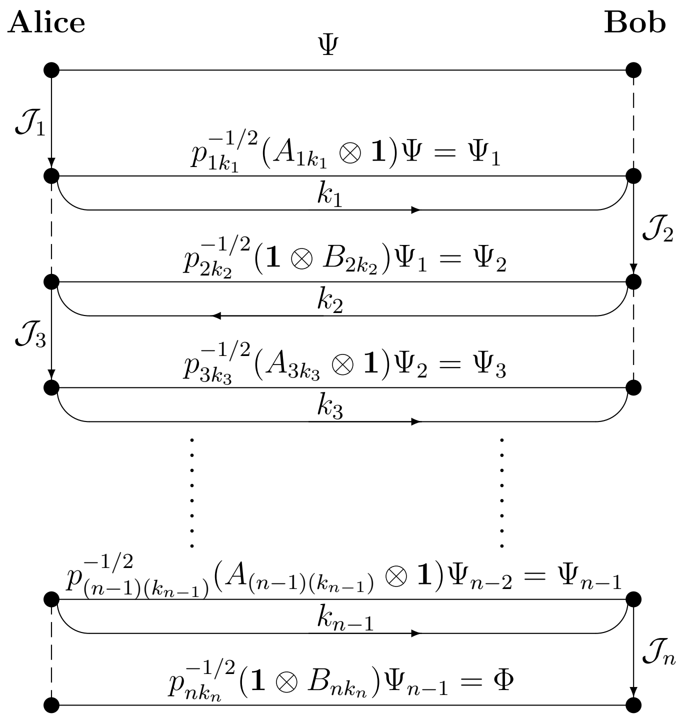
Zusammenfassung der 22. Vorlesung (21.01.2011)

5.2 *Lokale Messoperationen mit klassischer Kommunikation*:

5.2.1 *Das Nielsensche Theorem*:

Alice und Bob teilen sich einen bipartiten reinen Zustand Ψ. Alice und Bob haben die Möglichkeit an ihrem jeweiligen Teilchen lokale OCP Messoerationen durchzuführen und klassisch zu kommunizieren. Welche bipartiten reinen Zustände können sie auf diese Weise präparieren?.

Definition 1: Der bipartite reine Zustand $\Phi \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ heiße aus dem gegebenen Zustand $\Psi \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ *stochastisch LOCC präparierbar*, wenn es eine Strategie sukzessiver lokaler Messoperationen mit klassischer Kommunikation der Gestalt



gibt, die nach $n \in \mathbf{N}$ Schritten zum Ziel führt. Dabei werden die ungerade indizierten OCP Messoperationen, etwa

$$\mathcal{J}_l(\rho) = \sum_{k_l} A_{lk_l} \rho A^+_{lk_l}, \qquad p_{lk_l} = \mathrm{tr} A_{lk_l} \rho A^+_{lk_l},$$

von Alice an ihrem Teilchen durchgeführt. Alice teilt ihr Ableseergebnis k_l klassisch Bob mit, der dem entsprechend eine OCP Messung, etwa

$$\mathcal{J}_{l+1}(\rho) = \sum_{k_{l+1}} B_{l+1k_{l+1}} \rho B^+_{l+1k_{l+1}}, \qquad p_{l+1k_{l+1}} = \mathrm{tr} B_{l+1k_{l+1}} \rho B^+_{l+1k_{l+1}},$$

an seinem Teilchen durchführt und sein Ableseergebnis k_{l+1} Alice mitteilt, die dem ensprechend die $(l+2)$te Operation durchführt und so fort.

Diese Definition ist recht unbequem. Sie forfert zwar, dass es für jede Folge von Ableseergebnissen, etwa $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$, eine kleinste natürliche Zahl n gibt, so dass mit

$$\Psi = \sum_\nu c_\nu \varphi_\nu \otimes \psi_\nu$$

und

$$\begin{aligned} &p(k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n) = \\ &\quad \sum_\nu c_\nu \mathrm{tr}_A A_{nk_n} \ldots A_{2k_2} A_{1k_1} |\varphi_\nu >< \varphi_\nu| A^+_{1k_1} A^+_{2k_2} \ldots A^+_{1nk_n} \\ &\qquad\quad \mathrm{tr}_B B_{nk_n} \ldots B_{2k_2} B_{1k_1} |\psi_\nu >< \psi_\nu| B^+_{1k_1} B^+_{2k_2} \ldots B^+_{1nk_n} \neq 0 \end{aligned}$$

der nach n Schritten präparieserte präparierte Zustand

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{p(k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n)}} \sum_\nu c_\nu A_{nk_n} \ldots A_{2k_2} A_{1k_1} \varphi_\nu \otimes B_{nk_n} \ldots B_{2k_2} B_{1k_1} \psi_\nu$$

ist. Aber die Folgen der Ableseergebnisse sind Zufallsereignisse, n kann deshalb nicht vorbestimmt werden. Überdies haben Alice und Bob keine Möglichkeit, LOCC festzustellen, nach welchem Schritt das Ziel erreicht ist.

Definition 2: Der bipartite reine Zustand $\Phi \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ heiße aus dem gegebenen Zustand $\Psi \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ *fast sicher LOCC präparierbar*, wenn es eine eine endliche Folge sukzessiver lokaler OCP Messoperationen mit klassischer Kommunikation, etwa $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3, \ldots, \mathcal{J}_N$, der in der Definition 1 beschriebenen Gestalt gibt, so dass

$$\mathcal{J}_N \circ \mathcal{J}_{N-1} \circ \mathcal{J}_{N-2} \circ \cdots \circ \mathcal{J}_1 |\Psi >< \Psi| = |\Phi >< \phi|$$

gilt.

Im Gegensatz zu Definition 1 wird jetzt gefordert, dass Unabhänghig von der Folge der N Ableseergebnisse der Zustand Φ präpariert wird. Wir zeigen nun, dass die Folge der N lokalen Messoperationen zu einer lokaten Messoperation, die Alice durchführt, und einer lokaten unitären Operation, die Bob dem Ableseergebnis entsprechend durchzuführen hat, zusammengefasst werden kann. Dazu verwenden wir ein Korollar des Satzes über die Existenz der Schmidtdarstellung reiner bipartiter Zustände.

Satz: Sei der bipartite reine Zustand

$$\Psi = \sum_{\mu,\nu} \alpha_{\mu\nu} \eta_\mu \otimes \omega_\nu \in \mathcal{H}_! \otimes \mathcal{H}_2$$

gegeben, wobei $\{\eta_\mu\}$, $\{\omega_\nu\}$ Orthonormalsysteme im jeweiligen Hilbertraum sind, gegeben. Ferner sei $A = \sum_{\mu,\nu} |\eta_\mu > \alpha_{\mu,\nu} < \eta_\nu|$, und c_ν seien die Schmidtkoeffizienten von Ψ. Dann gelten:

(i) c_ν sind die Eigenwerte von $\sqrt{AA^+}$,

(ii) Ψ und $\Psi' = \sum_{\mu,\nu} \alpha_{\nu\mu} \eta_\mu \otimes \omega_\nu$ haben die gleichen Schmidtkoeffizienten,

(iii) $(V \otimes U)\Psi' = \Psi$ mit unitären V, U.

Beweis: (i) Es gilt

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}_2 |\Psi >< \Psi| = \mathrm{tr}_2 \sum_{\nu,\mu,\nu',\mu'} \alpha_{\mu\nu} \overline{\alpha}_{\mu'\nu'} |\eta_\mu \otimes \omega_\nu >< \eta_{\mu'} \otimes \omega_{\nu'}| = \\
&\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\nu,\mu,\nu',\mu'} \alpha_{\mu\nu} \overline{\alpha}_{\mu'\nu'} |\eta_\alpha >< \eta_\alpha \otimes \omega_\gamma | \eta_\mu \otimes \omega_\nu >< \eta_{\mu'} \otimes \omega_{\nu'} | \eta_\beta \otimes \omega_\gamma >< \eta_\beta| \\
&= \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\nu,\mu,\nu',\mu'} \alpha_{\mu\nu} \overline{\alpha}_{\mu'\nu'} |\eta_\alpha > \delta_{\alpha\mu} \delta_{\gamma\nu} \delta_{\mu'\beta} \delta_{\nu'\gamma} < \eta_\beta| \\
&= \sum_{\nu,\mu,\mu'} \alpha_{\mu\nu} \overline{\alpha}_{\mu'\nu} |\eta_\mu >< \eta_{\mu'}| = AA^+ = \sum_\gamma c_\gamma^2 |\varphi_\gamma >< \varphi_\gamma|.
\end{aligned}$$

(ii) Aus $\beta_{\mu\nu} = \alpha_{\nu\mu}$ folgt

$$\sum_\nu \beta_{\mu\nu}\overline{\beta}_{\mu'\nu} = \sum_\nu \alpha_{\nu\mu}\overline{\alpha}_{\nu\mu'} = \sum_\nu \overline{\alpha}_{\nu\mu'}\alpha_{\nu\mu},$$

also sind die Schmidtkoeffizienten von Ψ' die Eigenwerte von $\sqrt{A^+A}$. Nun gilt

$$\sqrt{AA^+}\varphi_\gamma = c_\gamma\varphi_\gamma \quad \Rightarrow \sqrt{A^+A}\sqrt{A^+}\varphi_\gamma = c_\gamma\sqrt{A^+}\varphi_\gamma$$

und damit die Behauptung.
(iii) ist trivial.

Wir kehren nun zu unsenren ursprünglichen Betrachtungen zurück. in den von Bob auszufühtrnfrn Messoperationen treten Operatoren der Form

$$(\mathbf{1} \otimes B)\Psi = (\mathbf{1} \otimes B)\sum_\nu c_\nu\varphi_\nu \otimes \psi_\nu = \sum_\nu c_\nu\varphi_\nu \otimes B\psi_\nu$$

auf. Mit $B = \sum_{\kappa,\lambda} |\psi_\kappa > B_{\kappa,\lambda} < \psi_\lambda|$, wobei wir o.B.d.A. annehmen, dass $\{\psi_\kappa\}$ eine Orthonormalbasis in $\mathcal{H}_A$ ist, wird daraus

$$(\mathbf{1} \otimes B)\Psi = \sum_{\nu,\kappa} c_\nu B_{\kappa\nu}\varphi_\nu \otimes \psi_\kappa.$$

Mit der analogen Annahme für $\{\phi_\kappa\}$ in $\mathcal{H}_B$ definieren wir $\tilde{B} := \sum_{\kappa,\lambda} |\varphi_\kappa > B_{\kappa,\lambda} < \varphi_\lambda|$, dann ist

$$(\tilde{B} \otimes \mathbf{1})\Psi = \sum_{\nu,\kappa} c_\nu B_{\kappa\nu}\varphi_\kappa \otimes \psi_\nu. = \sum_{\kappa,\nu} c_\kappa B_{\nu\kappa}\varphi_\nu \otimes \psi_\kappa,$$

und nach dem vorstehenden Satz gibt es unitäre Transfotmationen V und U, so dass

$$(\mathbf{1} \otimes B)\Psi = (V\tilde{B} \otimes U)\Psi = (\tilde{A} \otimes U)\Psi$$

gilt, wobei wir $\tilde{A} := V\tilde{B}$ gesetzt haben. Die mit geradem l indizierten lokalen OCP Messsperstionen, die von Bob an seinem Teilchen zurzuführen sind, können nun durch eine auf diese Weise bestimmte LOCC Operation

$$\sum_{k_l} (\tilde{A}_{lk_l} \otimes U_{lk_l})|\Psi_{l-1} >< \Psi_{l-1}|(\tilde{A}^+_{lk_l} \otimes U^+_{lk_l}),$$

$$\sum_{k_l} (\tilde{A}^+_{lk_l} \otimes U^+_{lk_l})(\tilde{A}_{lk_l} \otimes U_{lk_l}) = \sum_{k_l} (\tilde{A}^+_{lk_l}\tilde{A}_{lk_l} \otimes \mathbf{1}) = \left(\sum_{k_l} (\tilde{A}^+_{lk_l}\tilde{A}_{lk_l}\right) \otimes \mathbf{1}) = \mathbf{1}$$

ersetzt werden, wobei Allice die OCP Messoperation mit den Operatoren $\tilde{A}_{lk_l}$ an ihrem Teilchen durchführt, das Ableseergebnis k_l Bob klassisch mitteilt, der dann die unitäre Operation mit dem Operator U_{lk_l} durzuführen hat. Dabei haben wir verwendet, dass

$$\sum_{k_l} \tilde{A}^+_{lk_l} \tilde{A}_{lk_l} = \sum_{k_l} \tilde{B}^+_{lk_l} V^+ V \tilde{B}_{lk_l} = \sum_{k_l} \tilde{B}^+_{lk_l} \tilde{B}_{lk_l} = \mathbf{1}_A \Leftrightarrow \sum_{k_l} B^+_{lk_l} B_{lk_l} = \mathbf{1}_B$$

gilt. Führen wir solche Ersetzungen für alle mit geradem l indizierten Operationen in $\mathcal{J}_N \circ \mathcal{J}_{N-1} \circ \mathcal{J}_{N-2} \circ \cdots \circ \mathcal{J}_1 |\Psi >< \Psi| = |\Phi >< \phi|$ durch, dann haben wir für gerades N mit

$$\mathbf{A}_K = \tilde{A}_{Nk_N} A_{(N-1)k_N-1} \dots A_{3k_3} \tilde{A}_{2k_2} A_{1k_1}, \qquad \mathbf{U}_K = U_N U_{N-2} \dots U_4 U_2,$$

wobei $K = (k_1, k_2, k_3, \dots, k_N)$ ein Multiindex ist, die Folge von N sukzessiven LOCC Operationen zu einer LOCC Operation zusammengefasst

$$\mathcal{J}_N \circ \mathcal{J}_{N-1} \circ \cdots \circ \mathcal{J}_2 \circ \mathcal{J}_1 |\Psi >< \Psi| = \sum_K (\mathbf{A}_K \otimes \mathbf{U}_K) |\Psi >< \Psi| (\mathbf{A}^+_K \otimes \mathbf{U}^+_K),$$

$$\sum_K (\mathbf{A}^+_K \otimes \mathbf{U}^+_K)(\mathbf{A}_K \otimes \mathbf{U}_K) = \mathbf{1}.$$

Wir halten das Ergebnis unserer Überlegungwen in dem folgende Satz fest.

Satz: Bei gegebenem reinen Zustand $\Psi \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ ist der Zustand $\Phi \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ genau dann fast sicher LOCC präparierbar [s.Definition 2] wenn es ein LOCC Operation

$$\mathcal{K}(\rho) = \sum_\kappa (A_\kappa \otimes U_\kappa) \rho (A^+_\kappa \otimes U^+_\kappa), \quad \sum_\kappa A^+_\kappa A_\kappa = \mathbf{1}_A, \quad U^+_\kappa U_\kappa = \mathbf{1}_B$$

gibt, wobei die A_κ ein OCP Operation am ersten Teilchen mit ablesbaren Effekten κ bilden, due U_{kappa} unitär sind, und

$$\mathcal{K}(|\Psi >< \Psi|) = |\Phi >< \Phi|$$

ist.

Vermutlich läasst sich dieser Satz auch auf der Grundlage von Definition 1 beweisen, jedoch sollte der analytische Aufwand dazu höher sein.