Zusammenfassung der 23. Vorlesung (28.01.2011)

15.2.18 *Das Nielsenrsche Theorem (Fortsetzung)*:

Satz (Nielsen): Seien $\mathcal{H}_A$ und $\mathcal{H}_B$ Hilberträume endlicher Dimension. Der bipartite reine Zustand $\Phi \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ mit den Schmidtkoeffizienten d_i kann genau dann aus dem bipartiten reinen Zustand $\Psi \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ mit den Schmidtkoeffizienten c_i fast sicher durch lokale Operationen und klassische Kommunikation (LOCC) präpariert werden, wenn $\{c_i^2\} \prec \{d_j^2\}$ gilt.

Beweis: $\Rightarrow$: Mit den Schmidtzerlegungen

$$\Psi = \sum_k c_k \varphi_k \otimes \psi_k, \qquad \Phi = \sum_l d_l \chi_l \otimes \eta_l,$$

wobei wir o.B.d.A annehemen können, dass $\{\varphi_k\}$, $\{\chi_l\}$ Orthonormalbasen in $\mathcal{H}_A$ und $\{\psi_k\}$, $\{\eta_k\}$ Orthonormalbasen in $\mathcal{H}_B$ sind, ist

$$\begin{aligned}
\rho_\Psi &:= \operatorname{tr}_B|\Psi><\Psi| = \sum_k c_k^2 |\varphi_k><\varphi_k|, \\
\rho_\Phi &:= \operatorname{tr}_B|\Phi><\Phi| = \sum_l d_k^2 |\chi_l><\chi_l|.
\end{aligned}$$

Weiter gibt es nach Voraussetzung eine LOCC Operation

$$\mathcal{K}(\rho) = \sum_\kappa (A_\kappa \otimes U_\kappa)\rho(A_\kappa^+ \otimes U_\kappa^+), \quad \sum_\kappa A_\kappa^+ A_\kappa = \mathbf{1}_A, \quad U_\kappa^+ U_\kappa = \mathbf{1}_B$$

mit $\mathcal{K}(|\Psi><\Psi|) = |\Phi><\Phi|$. Damit gilt

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{p_\kappa}}(A_\kappa \otimes U_\kappa)\Psi, \quad \text{wobei} \quad p_\kappa = \operatorname{tr}(A_\kappa^+ A_\kappa \rho_\Psi),$$

so dass aufgrund der freien Basiswahl in $\mathcal{H}_B$ bei der Bildung der partiellen

Spur

$$\begin{aligned}
p_\kappa\,\rho_\Phi &= \mathrm{tr}_B((A_\kappa \otimes U_\kappa)|\Psi >< \Psi|(A_\kappa^+ \otimes U_\kappa^+)) \\
&= \mathrm{tr}_B((A_\kappa \otimes \mathbf{1})|\Psi >< \Psi|(A_\kappa^+ \otimes \mathbf{1})) \\
&= \sum_{i,j,k,l,k',l',m} |\varphi_i >< \varphi_i \otimes \psi_j|A_\kappa \otimes \mathbf{1}|\varphi_k \otimes \psi_l >< \varphi_k \otimes \psi_l|\Psi >< \Psi| \\
&\qquad\qquad |\varphi_{k'} \otimes \psi_{l'} >< \varphi_{k'} \otimes \psi_{l'}|A_\kappa^+ \otimes \mathbf{1}|\varphi_m \otimes \psi_j >< \varphi_m| \\
&= \sum_{i,j,k,l,k',l',m} |\varphi_i >< \varphi_i|A_\kappa|\varphi_k > \delta_{jl} < \varphi_k \otimes \psi_l|\Psi >< \Psi| \\
&\qquad\qquad |\varphi_{k'} \otimes \psi_{l'} > \delta_{jl'} < \varphi_{k'}|A_\kappa^+|\varphi_m >< \varphi_m| \\
&= \sum_{i,j,k,k',,m} |\varphi_i >< \varphi_i|A_\kappa|\varphi_k >< \varphi_k \otimes \psi_j|\Psi >< \Psi|\varphi_{k'} \otimes \psi_j > \\
&\qquad\qquad\qquad < \varphi_{k'}|A_\kappa^+|\varphi_m >< \varphi_m| \\
&= \sum_{i,j,k,k',,m} |\varphi_i >< \varphi_i|A_\kappa|\varphi_k > c_j\delta_{kj}c_j\delta_{k'j} < \varphi_{k'}|A_\kappa^+|\varphi_m >< \varphi_m| \\
&= \sum_{i,k,m} |\varphi_i >< \varphi_i|A_\kappa|\varphi_k > c_k^2 < \varphi_k|A_\kappa^+|\varphi_m >< \varphi_m| \\
&= A_\kappa\rho_\Psi A_\kappa^+.
\end{aligned}$$

Die Polardarstellung von $A_\kappa\sqrt{\rho_\Psi}$ liefert damit

$$A_\kappa\sqrt{\rho_\Psi} = \sqrt{A_\kappa\rho_\Psi A_\kappa^+}V_\kappa = \sqrt{p_\kappa\,\rho_\Phi}\,V_\kappa,$$

mit den unitären Operatoren V_κ auf $\mathcal{H}_A$, dann findet man wegen

$$\sum_\kappa A_\kappa^+ A_\kappa = \mathbf{1}$$

$$\rho_\Psi = \sum_\kappa \sqrt{\rho_\Psi}A_\kappa^+ A_\kappa\sqrt{\rho_\Psi} = \sum_\kappa p_\kappa V_\kappa^+\rho_\Phi V_\kappa,$$

also

$$\sum_k c_k^2|\varphi_k >< \varphi_k| = \sum_\kappa p_\kappa \sum_l d_l^2 V_\kappa^+|\chi_l >< \chi_l|V_\kappa.$$

Es folgt unmittelbar

$$c_k^2 = \sum_l (\sum_\kappa p_\kappa| < \chi_l|V|\varphi_k > |^2)d_l^2.$$

Die Mattrizen $((|<\ \chi_l|V|\varphi_k\ >|^2))$ sind offenbar doppelt stochastisch und mithin ihre konvexe Linearkombination. Nsch einem Satz über doppelt stochastische Matrizen ist dies äquivalent zu $\{c_i^2\} \prec \{d_j^2\}$. Damit ist die Notwendigkeit von $\{c_i^2\} \prec \{d_j^2\}$ gezeigt.

$\Leftarrow$: Wir zeigen zunächst, dass diese Bedingung für $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^2$ hinreicht. O.B.d.A. können wir annehmen, dass

$$\Psi = c_0|00> + c_1|11>, \quad \text{und} \quad \Phi = d_0|00> + d_1|11>$$

ist, denn alle anderen Zustände mit den gegebenen Schmidtkoeffizienten sind mit den angenommenen Ψ oder Φ durch lokale unitäre Operationen verknüpft, die mit der für den Spezialfall konstruierten LOCC Operation kombiniert werden können. Durch eine lokale unitäre Operation wandeln wir den Zustand Ψ um in

$$\begin{aligned}
\Psi' &= (|00> \ |01> \ |10> \ |11>)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c_0 & c_1 \\ -c_1 & c_0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} c_0 \\ 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00> \ |01> \ |10> \ |11>)\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_0 & c_1 \\ -c_1 & c_0 & -c_1 & c_0 \\ c_0 & c_1 & -c_0 & -c_1 \\ -c_1 & c_0 & c_1 & -c_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 \\ 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00> \ |01> \ |10> \ |11>)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ c_0^2 - c_1^2 \\ -2c_0c_1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}|00> - \frac{1}{\sqrt{2}}((c_1^2 - c_0^2)|10> + 2c_2c_1|11>) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}|00> - \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\alpha|10> + \sin\alpha|11>),
\end{aligned}$$

wobei

$$\cos\alpha = -(c_0^2 - c_1^2) = -(2c_0^2 - 1), \qquad \sin\alpha = 2c_0c_1 = 2c_0\sqrt{1 - c_0^2}.$$

Den Beweis der Hinlänglichkeit von $\{c_0^2, c_1^2\} \prec \{d_0^2, d_1^2\}$ erbringen wir, indem wir eine Messoperation konstruieren, die den Zustand Ψ', dessen Schmidkoeffizienten mit denen von Ψ übereubstimmen, in ein Gemisch von reinen

Zuständen mit Schmidtkoeffizienten d_o, d_1 umwandelt. Dazu definieren wir

$$A_0 = r_0|0><0| + r_1|1><1| \quad \text{und} \quad A_1 = r_1|0><0| + r_0|1><1|,$$

und setzen

$$r_0^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{Q^2}{4}}\right), \qquad r_1^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{Q^2}{4}}\right).$$

Dann ist

$$A_0^+ A_0 + A_1^+ A_1 = (|r_0|^2 + |r_1|^2)\mathbf{1}$$

und $|r_0|^2 + |r_1|^2 = 1$ ist ist zu fordern, wenn

$$\mathcal{I}(\rho) = (A_0 \otimes \mathbf{1})\rho(A_0^+ \otimes \mathbf{1}) + (A_1 \otimes \mathbf{1})\rho(A_1^+ \otimes \mathbf{1})$$

eine Messoperation sein soll. Dann gilt auch $1 = r_0^2 + r_1^2 = |r_0|^2 + |r_1|^2$ und die r_i^2 müssen reell und positiv sein. Deshalb ist $(Q/2)^2 \leq 1$ zu fordern. $\mathcal{I}(|\Psi'><\Psi'|)$ ist ein Gemisch der reinen Zustände

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}(A_0 \otimes \mathbf{1})\Psi' &= r_0|00> - r_1(\cos\alpha|10> + \sin\alpha|11>),\\
\sqrt{2}(A_1 \otimes \mathbf{1})\Psi' &= r_1|00> - r_0(\cos\alpha|10> + \sin\alpha|11>),
\end{aligned}$$

jeweils mit Wahrscheinlichkeit $p = 1/2$. Die Schmidtkoeffizienten dieser Zustände ergeben sich aus den Koeffizientenmatrizen,

$$\begin{pmatrix} r_0 & 0 \\ -r_1\cos\alpha & -r_1\sin\alpha \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ -r_o\cos\alpha & -r_0\sin\alpha \end{pmatrix}.$$

Die erste liefert durch Multiplikation mit ihrer Transponierten

$$\begin{pmatrix} r_0 & 0 \\ -r_1\cos\alpha & -r_1\sin\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_0 & -r_1\cos\alpha \\ 0 & -r_1\sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0^2 & -r_9 r_1\cos\alpha \\ -r_9 r_1\cos\alpha & r_1^2 \end{pmatrix}$$

und bei der zweiten sind nur r_0 und r_1 vertauscht. Beide Zustände führen auf dieselbe charakteristische Gleichung für die Eigenwerte, d.h. die Schmidtkoeffizienten.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} r_0^2 - x & -r_0 r_1\cos\alpha \\ -r_9 r_1\cos\alpha & r_1^2 - x \end{vmatrix} &= (r_0^2 - x)(r_1^2 - x) - r_0^2 r_1^2\cos^2\alpha \\
&= x^2 - x + r_0^2 r_1^2 \sin^2\alpha = 0
\end{aligned}$$

Mit

$$4r_0^2 r_1^2 = \left(1 + \sqrt{1 - \frac{Q^2}{4}}\right)\left(1 - \sqrt{1 - \frac{Q^2}{4}}\right) = \frac{Q^2}{4}$$

ergeben sich die Wurzeln der charakteristischen Gleichung zu

$$x_0 = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{Q^2}{4}\sin^2\alpha}\right), \qquad x_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{Q^2}{4}\sin^2\alpha}\right).$$

Wegen $d_0^2 + d_1^2 = 1$ gilt $\{x_0, x_1\} = \{d_0^2, d_1^2\}$ genau dann, wenn

$$\sqrt{1 - \frac{Q^2}{4}\sin^2\alpha} = d_0^2 - d_1^2, \quad \text{bzw.} \quad 1 - \frac{Q^2}{4}\sin^2\alpha = (d_0^2 - d_1^2)^2$$

ist, also

$$\frac{Q^2}{4} = \frac{1 - (d_0^2 - d_1^2)^2}{\sin^2\alpha} = \frac{(d_0^2 + d_1)^2 - (d_0^2 - d_1)^2}{4c_0^2 c_1^2} = \frac{4d_0^2 d_1^2}{4c_0^2 c_1^2} = \frac{d_0^2 d_1^2}{c_0^2 c_1^2}.$$

Die letzte Gleichheit der Kette ergibt sich wegen $(d_0^2 + d_1^2)^2 = 1$. Es bleibt noch zu zeigen, dass $Q^2/4 \leq 1$ erfüllt ist. Aus der Voraussetzung $\{c_0^2, c_1^2\} \prec \{d_0^2, d_1^2\}$ folgt $c_0^2 \leq d_0^2$ und wegen $c_0^2 + c_1^2 = d_0^2 + d_1^2 = 1$ auch $1 - c_1^2 \leq 1 - d_1^2$. Somit ist $1 + c_0^2 - c_1^2 \leq 1 + d_0^2 - d_1^2$ bzw. $c_0^2 - c_1^2 \leq d_0^2 - d_1^2$. Da auch $(c_0^2 + c_1^2)^2 = 1$ ist, folgt aus $(c_0^2 - c_1^2)^2 \leq (d_0^2 - d_1^2)^2$, dass $1 - 4c_0^2 c_1^2 \leq 1 - 4d_0^2 d_1^2$ und damit $d_0^2 d_1^2 \leq c_0^2 c_1^2$. Damit ist die Hinlänglichkeit für $\mathcal{H}_A = \mathcal{H}_B = \mathbf{C}^2$ gezeigt.

(Fortsetzung folgt)