Zusammenfassung der 5. Vorlesung (10.05.2010)

2.2 *Verschränktheit bipartiter reiner Zustände* : Die Verschränktheit bipartiter reiner Zustände lässt sich sehr einfach beschreiben, weil es ein Theorem gibt, das Zerlegungen dieser Zustände in gewissem Sinne kanonisch auszeichnet. Dies sind die Schmidt Zerlegungen, die bereits in dem Buch von Johann v. Neumann [Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. Berlin, J. Springer. (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. XXXVIII) (1932)] im Zusammenhang mit bipartiten (aus zzwei Teilen zusammengesetzten)Systemen behandelt wird. Natürlich lassen sich auch N-partite Systeme in zwei Teile zerlegen, für die die Schmidt Zerlegungen gelten. Jedoch gibt es $(N-1)!$ verschiedene Möglichkeiten, das System in elementare Bestandteile zu zerlegen und jede führt im Allgemeinen zu einer anderen, für die Art der Zerlegung spezifischen Aussage über die Verschränktheit.

Satz (Schmidtzerlegung, Schmidtdarstellung): Sei $\Psi \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, $\|\Psi\| = 1$, etwa $\dim \mathcal{H}_1 = M_1$, $\dim \mathcal{H}_2 = M_2$. Dann gibt es eine eindeutige Folge nicht zunehmender positiver reeller Zahlen $\{c_i\}_{i=0,1,\dots,(R-1)}$, $R \leq M_1$, $R \leq M_2$, $c_0 \geq c_1 \geq c_2 \geq \cdots \geq c_{(R-1)} > 0$, $\sum_0^{R-1} c_i^2 = 1$, und ferner Orthonormalsysteme $\{\psi_i\}_{i=0,1,2,\dots,(R-1)} \subset \mathcal{H}_1$, $\{\varphi_i\}_{i=0,1,2,\dots,R-1} \subset \mathcal{H}_2$ mit

$$\Psi = \sum_{i=0}^{R-1} c_i \psi_i \otimes \varphi_i.$$

Die c_i heißen die Schmidtkoeffizienten von Ψ, R heist der Schmidrang von Ψ. Die Orthonormalsysteme sind genau dann eindeutig, wenn die Schmidtkoeffizienten paarweise voneinander verschieden sind.

Beweis: Sei

$$\mathrm{tr}_2 |\Psi >< \Psi| = \sum_{i=0}^{R-1} \lambda_i |\psi_i >< \psi_i|$$

die Spektraldarstellung der partiellen Sprur von $|\Psi >< \Psi|$, wobei die Numerierung so gewählt sein, dass $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_{R-1} > 0$ ist. Dann bezeichne $\{\psi_i\}_{i=0,1,2,\dots,(M_1-1)}$ eine Verlängerung des Orthonormalsystems der

Eigenvektoren zu einer Orthonormalbasis in $\mathcal{H}_1$. Ist dann $\{\phi_i\}_{i=0,1,2,\dots,M_2-1}$ eine beliebige Orthonormalbasis in $\mathcal{H}_2$, dann gilt

$$\Psi = \sum_{i=0}^{M_1-1} \sum_{k=0}^{M_2-1} d_{ik}\, \psi_i \otimes \phi_k, \quad d_{ik} =< \psi_i \otimes \phi_k, \Psi >,$$

und damit

$$\mathrm{tr}_2|\Psi >< \Psi| = \sum_{i,j=0}^{M_1-1} \sum_{k=0}^{M_2-1} |\psi_i >< \psi_i \otimes \phi_k, \Psi >< \Psi, \psi_j \otimes \phi_k >< \psi_j|.$$

Also ist

$$\sum_{k=0}^{M_2-1} < \psi_i \otimes \phi_k, \Psi >< \Psi, \psi_j \otimes \phi_k >= \sum_{k=0}^{M_2-1} d_{ik}\overline{d_{ik}} = \left\{ \begin{array}{ll} \delta_{i,j}\lambda_i & \text{falls}\, i < R \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right. ,$$

weil die $|\psi_i >< \psi_j|$ linear unabhängige Operatoren sind. Für Ψ ergibt sich damit

$$\Psi = \sum_{i=0}^{R-1} \sqrt{\lambda_i}\psi_i \otimes \sum_{k=0}^{M_2-1} \frac{d_{ik}}{\sqrt{\lambda_i}}\phi_k.$$

Mit

$$c_i := \sqrt{\lambda_i} \quad \text{und} \quad \varphi_i := \sum_{k=0}^{M_2-1} \frac{d_{ik}}{\sqrt{\lambda_i}}\phi_k$$

hat Ψ die behauptete Darstellung, denn $< \varphi_i, \varphi_j >= \delta_{ij}$ und die Koeffizienten sind als die positiven Wurzeln der Eigenwerte eines selbstadjungierten Operators eindeutig bestimmt und haben die behaupteten Eigenschaften. Das Orthonormalsystem der Eigenfunktionen ist genau dann eindeutig, wenn der Operator nicht entartet ist, anderenfalls lassen sich in den Eigenräumen beliebig Orthonormalsysteme wählen.

Der Fall der Entartung einer partiellen Spur und der damit gegebenen Freiheit in der Wahl von Orthnormalsystemen (etwa der ψ_i) von Eigenvektoren hat große physikalische Bedeutung. Wir betrachten diesen Fall deshalb etwas genauer. Falls etwa $c_{i-1} > c_i = c_{i+1} = \cdots = c_{i+n} > c_{i+n+1}$ gilt, ist mit jeder unitären $n \times n$-Matrix

$$\begin{aligned} c_i \sum_{k=i}^{i+n} \psi_k \otimes \varphi_k &= c_i \sum_{l,m=i}^{i+n} \delta_{lm} \psi_l \otimes \varphi_m = c_i \sum_{k,l,m=i}^{i+n} V_{lk} \overline{V}_{mk} \psi_l \otimes \varphi_m \\ &= c_i \sum_{k=i}^{i+n} \left(\sum_{l=i}^{i+n} V_{lk} \psi_l \right) \otimes \left(\sum_{l=i}^{i+n} \overline{V}_{mk} \varphi_m \right). \end{aligned}$$

Diese Gleichung drückt explizit aus, welche Wahlmöglichkeiten für die Schmidtdarstellung eines reinen Zustands $\Psi \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ bestehen.